Luis Radford et Serge Demers

Communication et apprentissage

Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques

Rédaction : Luis Radford et Serge Demers
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne

Collaboration : Gilbert Lacroix, École Secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury
Joanne Lavigne-Rondeau, École Saint-Joseph, Sturgeon Falls
Manon Nadeau-Dupelle, École Saint-Joseph, Lancaster
Yves Rainville, École Saint-Joseph, Sturgeon Falls
Rita Venne-Beaudry, École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls

Conception graphique : Jo-Anne Labelle

Éditique : Lise Lauriault
Sylvie Fauvelle

Impression : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, 2004
435, rue Donald, Ottawa ON K1K 4X5
Commandes : Tél. : (613) 747-1553
Téléc. : (613) 747-0866
Site Web : www.cforp.on.ca
C. élec. : cforp@cforp.on.ca

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a fourni une aide financière pour la réalisation de ce projet. Cet apport financier ne doit pas pour autant être perçu comme une approbation ministérielle pour l'utilisation du matériel produit. Cette publication n'engage que l'opinion de ses auteurs, laquelle ne représente pas nécessairement celle du Ministère.

Ce projet a été également possible grâce à une subvention de recherche du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSHC/SSHRC).

© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2004

Tous droits réservés.

Permission accordée cependant à l'enseignant ou à l'enseignante de reproduire ce document pour utilisation en salle de classe ou pour des sessions de formation.

ISBN 0-77947-099-0
Dépôt légal — quatrième trimestre 2004
Bibliothèque nationale du Canada

Imprimé au Canada Printed in Canada

Le livre *Communication et apprentissage – Repères pratiques et conceptuels pour la salle de classe de mathématiques* est le résultat d'une recherche-action menée avec des enseignantes et des enseignants de cinq classes couvrant tous les cycles d'éducation. Le livre est destiné aux enseignantes et enseignants, aux conseillères et conseillers pédagogiques ainsi qu'aux professeurs d'université qui travaillent dans les programmes de formation initiale à l'enseignement. Il vise à fournir les éléments conceptuels et pratiques nécessaires pour pouvoir encourager, soutenir et évaluer la communication en salle de classe de mathématiques. En s'inspirant des théories contemporaines en éducation, les auteurs expliquent le rôle important que joue la communication dans l'apprentissage. Ils désignent une série d'objectifs par cycle d'études et une liste de stratégies d'enseignement qui visent à favoriser la communication en salle de classe. Pour chaque cycle, les stratégies sont illustrées à l'aide de leçons conçues pour atteindre les objectifs du cycle correspondant. Afin de montrer, de façon concrète, comment la communication aide les élèves à approfondir leurs connaissances en mathématiques, des extraits commentés de ces leçons sont présentés dans le livre. On y voit comment les élèves s'engagent dans des discussions mathématiques et élaborent des arguments divers pour essayer de convaincre leurs pairs et l'enseignante ou l'enseignant des propos qu'ils avancent.

Luis Radford est professeur titulaire à l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne de Sudbury, Ontario. Sa recherche porte sur la sémiotique culturelle, la cognition, l'épistémologie et l'apprentissage des mathématiques. Il est auteur de plus de 90 articles scientifiques et est membre du comité de lecture de plusieurs revues internationales dont *Educational Studies in Mathematics, For the Learning of Mathematics, Revue des sciences de l'éducation, Mathematical Thinking and Learning, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa et Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.*

Serge Demers est professeur adjoint à l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne de Sudbury, Ontario. Ses domaines de recherche comptent la mesure et l'évaluation, l'utilisation de la technologie en salle de classe, ainsi que l'enseignement des mathématiques et des sciences à l'élémentaire et au secondaire.

Table des matières

Avant-propos **7**

Chapitre 1 : La communication en mathématiques : repères pratiques et conceptuels **11**
1. Introduction : la communication aujourd'hui 12
2. Communication et apprentissage 14
3. La communication efficace 15
4. Pour en savoir plus… 17

Chapitre 2 : La communication comme compétence **19**
1. La structure générale d'une compétence 20
2. Les critères de la compétence Communication en mathématiques 21
   - Syntaxe et symboles 21
   - Organisation de la présentation 22
   - Engagement au dialogue 23
   - Considération des arguments et des propos des autres 23
3. Grille permettant d'évaluer la compétence en communication 23
4. Pour en savoir plus… 25

Chapitre 3 : Mise en place et gestion de la communication **27**
1. Quelques objectifs clés de la communication 28
2. L'organisation du travail en salle de classe 29
3. Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant 32
4. Pour en savoir plus… 34

Chapitre 4 : La communication en mathématiques au cycle préparatoire **35**
1. Introduction 36
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle préparatoire 37
3. Quelles stratégies d'enseignement? 37
4. Un exemple de salle de classe : la syntaxe d'un tableau 38
5. Survol et synthèse générale de l'exemple 44
6. Quelques pistes d'intervention 45
7. Pour en savoir plus… 45

Chapitre 5 : La communication en mathématiques au cycle primaire **47**
1. Introduction 48
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle primaire 49
3. Quelles stratégies d'enseignement? 50
4. Un exemple de salle de classe 51
   - L'apprentissage de la syntaxe 52
   - La distinction entre arguments clairs, justes et suffisants 57
5. Survol et synthèse générale de l'exemple 61
6. Quelques pistes d'intervention 62
7. Pour en savoir plus… 63

Chapitre 6 : La communication en mathématiques au cycle moyen 65
1. Introduction 66
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle moyen 69
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle moyen 69
4. Un exemple de salle de classe : les fractions équivalentes 70
5. Survol et synthèse générale de l'exemple 79
6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication 80
7. Pour en savoir plus… 80

Chapitre 7 : La communication en mathématiques au cycle intermédiaire 81
1. Introduction 82
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle intermédiaire 83
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle intermédiaire 83
4. Un exemple de salle de classe : les limites de la perception 84
5. Survol et synthèse générale de l'exemple 96
6. Quelques pistes d'intervention 99
7. Pour en savoir plus… 100

Chapitre 8 : La communication en mathématiques au cycle supérieur 101
1. Introduction 102
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle supérieur 102
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle supérieur 103
4. Un exemple autour de la mathématisation du réel 106
5. Survol et synthèse générale de l'exemple 117
6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication 119
7. Pour en savoir plus… 121

Chapitre 9 : L'évaluation de la compétence en communication en mathématiques 123
1. Introduction 124
2. Le besoin d'un outil d'évaluation 124
   L'outil 125
   La méthodologie 126
3. Un exemple 127
4. Pour en savoir plus… 135

Chapitre 10 : En guise de conclusion 137

Annexes : Contenu des annexes 141
Annexe 1 : Une leçon pour le cycle préparatoire 143
Annexe 2 : Une leçon pour le cycle primaire 149
Annexe 3 : Une leçon pour le cycle moyen 159
Annexe 4 : Une leçon pour le cycle intermédiaire 173
Annexe 5 : Une leçon pour le cycle supérieur 189

Avant-propos

L'année 1997 a marqué, sans nul doute, un grand tournant en ce qui a trait à la manière de concevoir l'enseignement en Ontario. C'est cette année-là, en effet, que le nouveau curriculum a commencé à être mis en vigueur. Cette date a marqué une rupture avec une vieille tradition curriculaire centrée essentiellement sur des contenus.

Certes, un curriculum ne spécifie pas la façon dont l'enseignement doit être mené, mais les modes d'enseignement ne peuvent pas ignorer les conceptions et les valeurs que véhicule un curriculum. C'est exactement ce qui est arrivé à l'enseignement des mathématiques que l'on a dû rajuster en prenant en compte les innovations apportées par le document ministériel.

Un des éléments les plus innovateurs du nouveau curriculum était l'identification de compétences qu'on devait développer chez l'élève. La question centrale de l'enseignement n'était plus : « Que doit-on enseigner? », non pas parce que la question avait perdu son intérêt, mais parce qu'elle était devenue insuffisante. Il fallait désormais répondre aussi à la question : « Pourquoi enseigne-t-on ceci ou cela? ». En d'autres mots, l'éducation scolaire ne pouvait plus se justifier par le contenu à enseigner; dorénavant, elle se justifiait par les compétences que l'apprentissage d'un contenu peut permettre à l'élève de développer.

Le curriculum de l'Ontario distingue un certain nombre de compétences à développer chez l'élève. Dans le cas des mathématiques, l'une de ces compétences est la communication. Comme nous le verrons au chapitre 1, cela n'est pas sans problèmes. À ce stade-ci, contentons-nous de remarquer que la conception de la communication véhiculée par le curriculum peut facilement se prêter à une interprétation, maintenant dépassée, à laquelle nous a conduit une longue tradition en éducation. Il s'agit d'une tradition qui conçoit l'apprentissage que fait l'enfant comme le résultat d'une entreprise purement individuelle. Sans vouloir minimiser le rôle de l'élève dans son apprentissage, Bruner et Hickmann disent que

> Jusqu'à très récemment, la tendance prédominante… était de traiter l'enfant comme un être isolé dans le monde, ayant pour tâche de former une représentation de ce monde indépendamment des autres. Aujourd'hui nous savons que notre représentation du monde est en grande partie constituée par des règles socioculturelles (et) par les conventions du langage…[1]

[1] J. S. Bruner et M. Hickmann. (1983). « La conscience, la parole et la "zone proximale" : réflexions sur la théorie de Vygotsky ». Dans J. S. Bruner. *Savoir faire, savoir dire*. Paris : Presses universitaires de France, p. 288.

La pédagogie des années 1990, centrée sur l'élève, était sans doute une bonne idée. Mais en se bornant exclusivement à l'élève, cette pédagogie ne tenait pas compte du contexte culturel et social dans lequel prenait place l'apprentissage.

Ainsi, étudier la communication selon le bon usage de la syntaxe et des conventions mathématiques est nécessaire, mais insuffisant. Étudier la communication du point de vue de la présentation que fait l'élève d'une recherche mathématique est également nécessaire, mais insuffisant. Il faut prendre en compte la communication sur son propre terrain. Ce terrain est celui de la discussion, de l'échange et du débat en salle de classe.

Il y a peut-être deux ou trois ans, nous avons fait ces remarques lors d'une rencontre organisée par le ministère de l'Éducation à Toronto. Nous avons continué à discuter de communication et d'apprentissage, et l'idée d'offrir aux enseignantes et aux enseignants de l'Ontario la possibilité de concevoir la communication sous un angle plus large a pris forme peu à peu. Le résultat est le livre que voici. Il est le produit d'une recherche-action menée avec des enseignantes et enseignants de cinq classes couvrant tous les cycles d'éducation. Ensemble, nous avons réfléchi aux objectifs relatifs à la compétence Communication selon le cycle d'enseignement, aux façons de choisir l'activité mathématique ainsi qu'aux stratégies de gestion de classe qui favorisent le mieux les situations d'argumentation, de preuve et de discussion entre les élèves. Nous avons élaboré des leçons modèles qui ont été par la suite enregistrées en salle de classe. Plusieurs des chapitres qui constituent ce livre présentent des extraits des discussions des élèves. Ces extraits montrent comment la communication peut favoriser l'apprentissage.

Les chapitres ont été organisés selon une séquence logique. Chaque chapitre approfondit les éléments conceptuels et pratiques de la communication et de l'apprentissage présentés aux chapitres précédents. Toutefois, la lectrice ou le lecteur pressé peut lire les trois premiers chapitres qui portent sur la communication et l'apprentissage en général. Elle ou il pourra ensuite choisir l'un des chapitres 4, 5, 6, 7 ou 8 (le chapitre 4 est consacré au cycle préparatoire, le chapitre 5 au cycle primaire, etc.) et terminer par la lecture des chapitres 9 et 10.

Comme toute écriture, ce livre porte les traces des idées dont il est issu. Il est porteur des voix des personnes qui l'ont rendu possible. Un livre, comme toute autre œuvre littéraire, artistique ou scientifique, est la confluence d'une diversité de voix et de perspectives. Un livre est un bel exemple de ce que Bakhtin appelait un objet « hétéroglosique » (c'est-à-dire un objet où a lieu la rencontre d'une pluralité sociale, culturelle, historique et psychologique de vues et de significations[2]).

2 M. Bakhtin. (1984). *Esthétique de la création verbale.* Paris : Gallimard.

Nous remercions de manière très spéciale les élèves qui ont participé au projet de recherche sur la communication ainsi que leurs parents.

Le travail des assistantes et assistants de recherche a été très important. Il a été mené par Angèle Bellehumeur, Natalie Bisaillon, Mélissa Caron, Nathalie Deault, Simon Dubosq, Monique Ferguson, Pierre Girouard, Vicky Perrier, Nathalie Ritchie et Andrew Sanderson.

Nous voudrions remercier vivement le ministère de l'Éducation de la subvention accordée pour mener à terme ce projet.

Nous voulons remercier également le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada/The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSHC/SSHRC) dont les subventions accordées au cours des années nous ont permis d'élaborer le cadre théorique de ce travail.

Luis Radford et Serge Demers
Sudbury, Pâques 2004.

Chapitre 1

La communication en mathématiques : repères pratiques et conceptuels

Plan du chapitre

1. Introduction : la communication aujourd'hui
2. Communication et apprentissage
3. La communication efficace
4. Pour en savoir plus…

> Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale.
>
> L. Vygotski, *Pensée et langage*. Paris. Éditions sociales, p. 157.

1. Introduction : la communication aujourd'hui

Dans l'espace d'une dizaine d'années, la communication est devenue l'un des thèmes centraux dans plusieurs disciplines. En effet, il existe actuellement un vif intérêt en sociologie, en anthropologie, en sciences, en linguistique, en psychologie, en éducation, etc. pour la communication. Cet intérêt est sans doute lié aux transformations subies par les sociétés contemporaines où l'on est passé, comme l'indique Kress, d'une société de production à une société d'information[3]. Alors qu'une lettre prenait plusieurs semaines pour se rendre d'un continent à l'autre, aujourd'hui, à l'heure de la globalisation mondiale, un message électronique est reçu presque immédiatement. Les nouveaux moyens de communication ont conduit à une explosion sans précédent du nombre de messages qui circulent chaque jour.

Dans ce contexte, apprendre à communiquer est devenu une priorité du curriculum scolaire. Il n'est donc pas étonnant que, dans la refonte curriculaire de l'Ontario, menée à la fin des années 1990, et dans celle du Québec, menée au début des années 2000, la communication ait été identifiée comme l'une des principales compétences à développer chez les élèves.

Néanmoins, la prise en compte de la communication en salle de classe de mathématiques se heurte encore à plusieurs difficultés. Une des raisons relève du fait que les enseignantes et enseignants de nos écoles d'aujourd'hui appartiennent (sinon tous, la plupart) à la longue série de générations où l'enseignement des mathématiques a été conçu à partir du modèle de l'élève qui apprenait en solitaire. Papier et crayon en main – ces outils qui ont remplacé non sans difficulté la technologie de la petite tablette noire, son chiffon et la craie – l'élève de ces générations a passé la période de mathématiques à travailler dans le plus grand silence, pratiquement isolé de ses pairs.

Les changements récents en éducation, subsumés dans les transformations sociales mentionnées précédemment, ont certainement fini par secouer le silence séculaire de la classe de mathématiques. L'arrivée à l'école de nouvelles technologies comme les calculatrices et les ordinateurs ainsi que l'apparition de nouvelles idées au sujet de la communication ont changé le visage de la salle de classe. Toutefois, la recherche de situations idéales pour favoriser le développement de la communication continue à poser des problèmes aux enseignantes et enseignants. Comment planifier effectivement une leçon afin de rendre pertinente la communication chez les élèves? Comment gérer la leçon pendant son déroulement pour s'assurer que les élèves communiquent de façon efficace? Comment évaluer la communication? Voilà trois questions auxquelles il est encore difficile de répondre et qui resteront posées aussi longtemps qu'on n'aura pas fourni de réponse adéquate à la question que voici :

---

3 G. Kress. (1997). *Before Writing. Rethinking the Paths to Literacy*. London: Routledge.

Quel est le lien entre communication et apprentissage?

Il y a une conception de communication, encore très répandue, qui suggère que, quand une personne A communique une idée I à une personne B, ce que fait l'émetteur A, c'est d'inscrire l'idée I dans un certain code, puis de l'envoyer au récepteur B. Le récepteur B décode le message et, en le décodant, réalise que ce que A lui « envoie », c'est l'idée I. Comme le remarque très bien le fondateur du constructivisme radical, Ernest von Glasersfeld, cette conception de la communication est très problématique[4].

Ce que von Glasersfeld trouve de problématique dans cette conception de la communication, c'est qu'elle suppose les idées déjà formées. Selon cette conception, A et B possèdent, dès le départ, le même ensemble d'idées. Communiquer revient à un échange. Il n'y a pas de nouveauté du point de vue de la construction du savoir. S'il y a nouveauté, c'est peut-être dans le fait que maintenant B sait ce que A voulait lui indiquer. Mais l'idée I, envoyée par A, devait faire déjà partie des connaissances de B : s'il en était autrement, B n'aurait pas pu retrouver cette idée en décodant le message de A; ce que B aurait trouvé à l'autre bout du fil n'aurait été que du « bruit ».

En tenant ces propos, von Glasersfeld touche un des points les plus vulnérables de la psychologie cognitive qui, en restant essentiellement empiriste dans ses concepts clés d'« émetteur », de « récepteur » et d'« information », n'a pas réussi à formuler de façon convaincante le problème de la « construction » du savoir, même si elle ne se prive pas d'insérer, dans son jargon technique, le mot « construction » et de réclamer un statut actif à l'individu qui apprend.

Pour répondre à la question du lien entre communication et apprentissage, il est nécessaire d'aller au-delà de l'idée de communication en tant qu'envoi et réception de messages. Comment peut-on alors conceptualiser la communication? Les théories contemporaines en éducation mathématique proposent différentes réponses. Naturellement, il y aura certaines différences dans les réponses selon la théorie considérée. Cependant, il ne nous semble pas faux de dire que ces théories convergent sur le point suivant : la communication est une forme d'apprentissage.

Ainsi, certaines approches socioconstructivistes et interactionnistes conçoivent l'apprentissage comme une *négociation* conceptuelle à laquelle participent élèves et enseignantes et enseignants. En théorisant l'apprentissage dans la direction d'une négociation du sens des concepts à apprendre, ces théories donnent une plus grande importance à la communication en salle de classe que l'enseignement traditionnel, qui, lui, confinait l'élève à l'isolement et au travail individuel.

Tout comme les approches socioconstructivistes, les approches inspirées des travaux de Lev Vygotski mettent l'accent sur le rôle des pairs, mais elles le font d'une façon différente. À la place de *négociation*, on parle de *collaboration* entre pairs. La collaboration a lieu à l'intérieur d'une activité structurée souvent en étapes. L'activité est caractérisée par un *but* global (en l'occurrence, le contenu de l'apprentissage) qui est atteint par l'entremise d'outils culturels (symboles, objets, etc.) qui *médiatisent* l'activité (c'est-à-dire qui servent de support et permettent de mener à terme l'activité elle-même).

---

4 A. Pitasi. (2001). *Constructing Communication. Interview with Ernest Von Glasersfeld* (téléchargé du site http://www.univie.ac.at/constructivism/papers/ le 31 janvier 2004).

Il n'est pas dans nos intentions de nous arrêter sur les détails entre les différentes théories en éducation à propos de la communication[5]. Dans la section qui suit, nous nous limiterons à présenter les traits fondamentaux de l'approche que nous proposons.

2. Communication et apprentissage

Dans le contexte des mathématiques scolaires, *apprendre, c'est s'approprier un savoir* qui possède une longue histoire culturelle. L'étymologie du mot *apprendre* est tout à fait éclairante à ce sujet. En effet, *apprendre* vient du terme latin *apprehendere* qui veut dire « prendre », « saisir » quelque chose qui était déjà là.

La conception de communication que nous proposons ici est directement liée à l'idée que l'appropriation d'un savoir par l'élève passe par une *prise de conscience* du concept saisi. Pour mieux comprendre ce que nous voulons dire par *prise de conscience*, arrêtons-nous un moment sur ce qui différencie l'apprentissage des animaux de celui des humains. On sait que les rats, par exemple, peuvent apprendre certains comportements élémentaires, tel sortir d'un labyrinthe. Mais, comme dit Tulviste[6], les rats continuent à faire exactement ce qu'ils ont fait pendant des siècles, sans pouvoir innover. Les humains, par contre, sont toujours en train de créer de nouvelles façons de faire. La différence réside dans ceci : l'apprentissage des rats obéit à de simples associations conditionnées; leur apprentissage ne passe pas, comme c'est le cas chez les humains, par une prise de conscience de ce qui est appris. C'est cette prise de conscience qui permet, par la suite, d'imaginer et de créer des situations nouvelles[7].

Or, qu'est-ce qui rend possible la prise de conscience caractéristique à l'être humain? Un élément clé en est la langue. La langue joue en effet un rôle privilégié en ce sens qu'elle permet d'interpréter les autres systèmes de signes (p. ex., à l'aide de la langue, on peut interpréter un tableau, une composition musicale, une formule algébrique)[8]. De plus, elle est le seul système de signes *réflexif*, c'est-à-dire le seul système de signes qui sert à s'interpréter lui-même. La langue fonctionne comme une sorte de miroir : elle offre une *réflexion* de la réalité et, en la réfléchissant, la langue assure une prise de conscience de cette réalité, y compris celle de soi-même[9].

Notre réponse à la question du lien entre communication et apprentissage peut être formulée comme suit : communication et apprentissage sont intimement liés. Ils sont intimement liés parce que l'apprentissage humain repose de façon cruciale sur les mécanismes de réflexion actifs qu'offre la langue.

---

5 Voir à ce sujet A. Sierpinska. (1998). "Three epistemologies, three views of classroom communication: constructivism, sociocultural approaches, interactionism". In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi et A. Sierpinska (dirs.). *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (p. 30-62). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics

6 P. Tulviste. (1991). *The Cultural-Historical Development of Verbal Thinking*. New York: Nova Science.

7 Notons au passage que la prise de conscience dont nous parlons ici (par exemple la prise de conscience du concept d'équation ou de nombre négatif) ne doit pas être considérée comme le résultat d'une attitude passive. Les empiristes du XVIIIe siècle, comme Hume, croyaient que nos pensées résultaient des impressions que les objets produisaient sur nous. Kant s'est battu contre cette conception. Puisque les objets conceptuels ne peuvent pas nous « frapper » et puisque nous ne pouvons pas les « sentir », Kant voyait mal comment, dans une optique empiriste de la connaissance, on pouvait expliquer la façon avec laquelle nous sommes parvenus à connaître ce que nous savons des mathématiques, de l'esthétique, de l'éthique ou de tout autre domaine du savoir.

8 C'est pour cela que le linguiste Émile Benveniste disait que la langue est l'interprète de tous les systèmes de signes. Voir E. Benveniste. (1974). *Problèmes de linguistique générale II, Sémiologie de la langue*. Paris : Gallimard, p. 43-66.

9 En commentant une idée du philologue russe Alexandre Potebnia, Vygotski disait que « le langage est un moyen pour se comprendre soi-même ». L. Vygotski. (1985). *Pensée et langage*. Paris : Éditions sociales, p. 189.

Mais ce serait une erreur de réduire l'apprentissage aux mécanismes de réflexion facilités par la langue. La langue, comme disait Leont'ev, n'est pas un démiurge[10]. Dans la perspective que nous proposons, la prise de conscience qui sous-tend l'apprentissage a lieu à l'intérieur de processus sociaux de production de sens. Outre la langue, trois éléments fondamentaux participent aux processus de production de sens :

– l'activité kinesthésique qui accompagne l'apprentissage (actions, gestes, mouvement corporel);

– le recours à des symboles mathématiques variés;

– les outils technologiques que l'élève utilise dans son apprentissage.

Même si l'activité kinesthésique, les symboles mathématiques et les outils technologiques n'offrent pas le même niveau de réflexivité que la langue, ils contribuent de façon décisive à la formation et à l'appropriation du savoir[11].

Il en découle que la communication, entendue comme activité sociale et culturelle médiatisée par la langue, les symboles scientifiques et les outils technologiques, apparaît comme l'un des moyens privilégiés d'appropriation du savoir. En participant à une discussion avec ses pairs et l'enseignante ou l'enseignant, l'élève acquiert une conscience de plus en plus nette des objets d'apprentissage. Mais il ne faudrait pas penser que l'apprentissage consiste à saisir les objets conceptuels comme on saisit un objet concret, telle une pomme. En effet, l'objet mathématique ne peut être saisi que si l'on saisit en même temps les formes de raisonnement et d'argumentation qui lui sont concomitantes.

3. La communication efficace

Le dernier commentaire nous amène au problème des caractéristiques que doit posséder une communication pour qu'il y ait un apprentissage effectif. S'il est vrai que la communication est essentielle à l'apprentissage, cela ne veut pas dire que n'importe quelle communication est efficace. Pour bien distinguer les communications qui sont intéressantes du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage, nous proposons de garder présent à l'esprit le principe suivant.

Principe de la relation entre concept et raisonnement :

La relation qui existe entre concept et raisonnement est une relation d'interdépendance cognitive.

Cela veut dire que les concepts mathématiques (p. ex., les nombres, les figures géométriques, la probabilité) prennent un sens au moment de leur insertion dans certaines formes de raisonnement. Ainsi, quand on demande à un élève de 4e année de comparer la probabilité entre deux événements, le concept de probabilité émerge de son inclusion dans un raisonnement qui exprime un certain type de comparaison. En contrepartie, pour se faire, le raisonnement doit prendre appui sur un concept, même si

10 A. N. Leont'ev. (1961). "Learning as a problem in psychology". In *Recent Soviet Psychology*, N. O'Connor (dir.) (p. 227-246). New York: Liveright.

11 Voir L. Radford, S. Demers, J. Guzmán and M. Cerulli. (2003). "Calculators, graphs, gestures, and the production of meaning". In N. Pateman, B. Dougherty and J. Zilliox (dirs.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME27 – PMENA25), vol. 4, p. 55-62. Voir aussi F. Arzarello and O. Robutti. (2001). "From body motion to algebra through graphing". In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (dirs.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, The University of Melbourne, Australia, Vol. 1, p. 33-40.

celui-ci n'est qu'en émergence. Le savoir mathématique, en général, émerge de la relation mutuelle entre le raisonnement employé et le concept recherché. En d'autres mots, il ne peut pas y avoir de concept sans raisonnement, comme il ne peut pas y avoir de raisonnement sans concept.

En nous appuyant sur le principe précédent de la relation interdépendante entre concept et raisonnement, nous pouvons dire que les communications efficaces sont celles qui fourniront des occasions d'échange et de réflexion entre élèves et entre élèves et enseignante ou enseignant en sollicitant une analyse critique de la pertinence et de l'exactitude des raisonnements utilisés. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3, quand nous discuterons des stratégies pédagogiques pour favoriser la communication en salle de classe. Entre-temps, nous pouvons résumer notre approche didactique à la communication de la manière suivante :

> *La communication en classe de mathématiques est un moyen indispensable et incontournable d'apprentissage. Mais pour être efficace, la communication doit favoriser le recours à des raisonnements et à des argumentations mathématiques se rapportant aux concepts visés.*

Dans l'approche que nous proposons, la communication n'est donc pas simplement quelque chose d'accessoire à l'apprentissage. Au contraire, la communication est conçue comme faisant partie du cheminement graduel qui permet à l'élève de saisir et de s'approprier les contenus conceptuels mathématiques à l'intérieur de processus sociaux de production de sens. Elle tient compte du fait que les contenus conceptuels et les raisonnements mathématiques véhiculés dans la communication sont saisis ou appris en fonction des capacités cognitives des élèves à un moment donné de leur scolarisation.

Or, dans la mesure où la participation à la communication en salle de classe sollicite de l'élève qu'elle ou il soit en mesure de mobiliser des formes de raisonnements et d'argumentations appropriées et dans la mesure où elle sollicite également de l'élève son insertion dans les processus sociaux de production de sens et l'adoption de comportements discursifs de nature sociale (comme savoir écouter), la communication peut être considérée comme une *compétence* que les élèves développent de façon progressive.

Dans le chapitre qui suit, nous étudions la communication en tant que compétence; nous y abordons le problème des critères qu'on peut se donner afin de déterminer le niveau de compétence acquis par un élève en matière de communication.

4. Pour en savoir plus...

Bartolini Bussi, M. (1998). "Verbal interaction in the mathematics classroom: a vygotskian analysis". In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi and A. Sierpinska (dirs.). *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* p. 65-84. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Brudnak, K. (1998, January/February). "Math communication". *Learning*, 28 (4), 38-49.

Cawley, J., and R. Reines. (1996, Winter.) "Mathematics as communication". *Teaching Exceptional Children*, 28 (2), 29-34.

Cotton, T., L. Cox, A. Gammon, R. Goldstein, F. Monaghan, C. Morgan, T. Robin, A. Watson, H. Wright and W. Willson. (1997, June). "Communicating Mathematics". *Mathematics Teaching*, 159, 38-41.

D'Entremont, Y. (1995). « Communiquer en mathématiques? Pourquoi pas? » *Vie pédagogique*, nº 95, septembre-octobre 1995, p. 12-14.

Huinker, D., and C. Laughlin. (1996). "Talk your way into writing". In P. Elliott and M. Kenney, *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond*, 1996 Yearbook (p. 81-88). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Mcnair, R. (2000). "Working in the Mathematics frame: maximizing the potential to learn from students' Mathematics classroom discussions". *Educational Studies in Mathematics*, 42, 197-209.

Muth, D. (1997, January-March). "Using cooperative learning to improve reading and writing in Mathematical problem solving". *Reading & Writing Quarterly*, 13 (1), 71-83.

Pallascio, R. 1994. « Expliquer un mot de mathématique, c'est entrer dans les mathématiques ». *Vie pédagogique*, nº 87, janvier-février 1994, p. 41-45.

Pratt, N. (2002, December). "Mathematics as thinking". *Mathematics Teaching*, 181, 34-37.

Schoen, H., D. Bean and S. Ziebarth. (1996). "Embedding communication throughout the Curriculum". In P. Elliott et M. Kenney (dirs.), *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond*, 1996 Yearbook (p. 171-179). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Seeger, F. (1991). "Interaction and knowledge in mathematics education". *Recherche en didactique des Mathématiques*, 11 (2-3), 125-166.

Siegel, M., and R. Borasi. (1992, Spring). "Toward a new integration of reading in Mathematics instruction". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14 (2), 18-36.

Voigt, J. (1995). "Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms". In P. Cobb and H. Bauersfeld (dirs.), *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates, p. 163-201.

Voigt, J. (1998). "The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena". In F. Seeger, J. Voigt and U. Waschescio (dirs.), *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press, p. 191-220.

Chapitre 2

La communication comme compétence

Plan du chapitre

1. La structure générale d'une compétence
2. Les critères de la compétence Communication en mathématiques :
   - Syntaxe et symboles
   - Organisation de la présentation
   - Engagement au dialogue
   - Considération des arguments et des propos des autres
3. Grille permettant d'évaluer la compétence en communication
4. Pour en savoir plus…

1. La structure générale d'une compétence

En termes généraux, une compétence est un savoir qui s'exprime dans l'action, c'est un savoir-agir. Puisque les actions et leurs buts peuvent être variés, une compétence peut se manifester de plusieurs façons. Du point de vue de l'enseignement, il est souvent convenable de faire un « découpage » *a priori* de la compétence. Chacun de ces « découpages » représente alors une dimension de la compétence en question. Considérer une compétence comme étant constituée de plusieurs dimensions est assurément fort commode lorsqu'il s'agit d'évaluer la maîtrise que l'élève possède de celle-ci à un certain moment de sa scolarisation. On peut, en effet, examiner la compétence de l'élève à la lumière de ces dimensions, qui deviennent de cette façon des « critères » de maîtrise de la compétence[12].

Or, dans leur formulation, les critères doivent refléter la nature dynamique de l'apprentissage. Ainsi, chaque critère peut inclure une liste de mots **descripteurs** qui servent à décrire des différences qualitatives de rendement[13]. La figure 1 ci-dessous montre la structure d'une compétence divisée en quatre critères.

En suivant de près le programme-cadre de mathématiques du ministère de l'Éducation de l'Ontario, nous avons retenu quatre critères pour la compétence Communication. Ces quatre critères essayent de rendre compte de la complexité de l'acte de communiquer.

Un des critères se penche sur la maîtrise atteinte par l'élève du langage mathématique, du sens que véhicule ce langage et de sa syntaxe. Un autre des critères se centre sur la compréhension de différents types d'arguments (p. ex., arguments clairs, justes, suffisants) et de leur mode d'organisation afin de rendre une argumentation mathématique convaincante. Un autre critère tourne autour de la capacité de l'élève à s'engager au dialogue. Enfin, le dernier critère examine la communication de l'élève à la lumière de sa capacité à écouter les autres et à donner suite à leurs arguments.

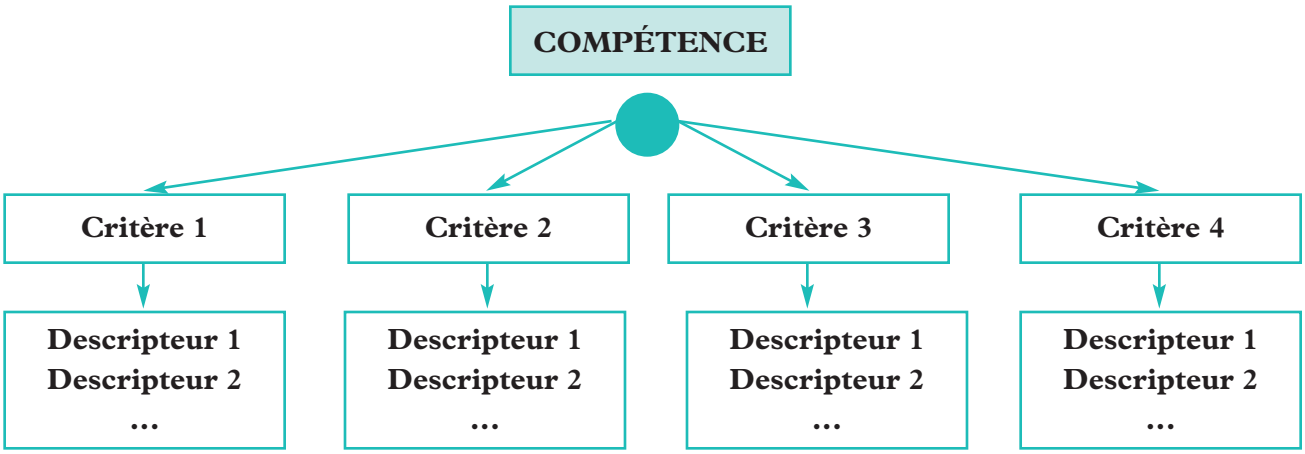


Figure 1. Structure générale d'une compétence. Dans cet exemple, la compétence est divisée en quatre *critères*; chaque critère s'exprime à l'aide de **descripteurs** qui reflètent le niveau de maîtrise atteint par l'élève dans son apprentissage. Les descripteurs peuvent changer d'un critère à l'autre.

---

12 Il ne faut pas oublier, néanmoins, que ces critères correspondent à un découpage analytique et que, par conséquent, dans la réalité, plusieurs de ces dimensions peuvent se chevaucher.

13 Rappelons en effet que, dans la terminologie du ministère de l'Éducation de l'Ontario, un *descripteur* sert à caractériser le rendement de l'élève vis-à-vis du critère en question et permet de situer ce rendement sur une échelle qualitative à quatre niveaux. Par exemple, « clarté ». Un argument peut être présenté avec peu de clarté, avec une certaine clarté, avec clarté ou avec beaucoup de clarté.

Chacun des quatre critères étudie une dimension particulière de la communication. Le premier s'applique davantage à la communication écrite, les deux derniers à la communication orale. Le deuxième s'applique aussi bien à l'une qu'à l'autre.

On trouvera ci-dessous, en italiques, la définition du critère, accompagnée d'un commentaire.

2. Les critères de la compétence Communication en mathématiques

SYNTAXE ET SYMBOLES

Avec clarté et exactitude, l'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématiques.

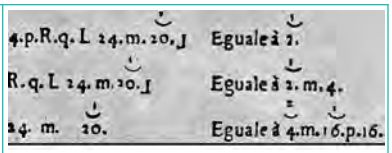
Comme l'indique sa définition, ce critère repose sur deux descripteurs : clarté et exactitude.

Ce critère prend en considération le fait que les conventions et les modes d'organisation du texte mathématique écrit sont l'aboutissement d'un long processus historico-culturel que l'élève doit s'approprier au cours de son passage à l'école. Le système de numération de nombres (unités, dizaines, centaines, etc.), le langage algébrique, les tableaux, les graphiques, etc. reposent sur des sens et des syntaxes hautement complexes dont les subtilités de fonctionnement ne sont comprises qu'au bout de plusieurs années d'effort (voir Tableau 1).

François Viète (1540-1603) a introduit l'utilisation systématique de lettres pour désigner les inconnues et les constantes dans des expressions algébriques. Dans son symbolisme, l'expression :

« Aq + Bq + A in B bis » correspond à l'expression moderne « $a^2 + b^2 + 2ab$ ».

« Aq » est l'abréviation de « A quadratum » (c'est-à-dire le carré de A). L'expression « in » signifie « multiplication »; « bis » veut dire, en latin (la langue dans laquelle écrivait ce célèbre mathématicien français du XVIe siècle), « deux fois ». Notons que Viète utilise le symbole « + » pour désigner l'addition. Un siècle avant Viète, les mathématiciens italiens avaient utilisé « p » (de « più », c'est-à-dire « plus ») pour l'addition (et « m » pour « minus » ou « moins »). L'utilisation des symboles « + » et « – » correspond à une abstraction historique importante.



$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x$$
$$\sqrt{24 - 20x} = 2x - 4$$
$$24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$$

Tableau 1. À gauche, comparaison de la syntaxe algébrique du XVIe siècle avec la syntaxe contemporaine. À droite, un extrait de *L'Algebra* de Rafaele Bombelli (1572) avec la traduction en symboles modernes. On voit que, pour exprimer l'inconnue, Bombelli utilise une petite ligne courbe au-dessus de ce que nous appelons aujourd'hui le coefficient de l'inconnue; le nombre « 2 » sur la petite ligne signifie x^2. La racine carrée est symbolisée par « R.q. » (« Radice quadrata »); les parenthèses n'étant pas encore inventées, pour indiquer que la racine carrée affecte le terme 24-20x, Bombelli utilise une lettre L et la lettre L « inversée ».

ORGANISATION DE LA PRÉSENTATION

Avec clarté, logique et efficacité, l'élève organise, présente, justifie et appuie ses idées à l'aide de différentes formes de communication (p. ex., projets, diagrammes, croquis, dessins).

Les descripteurs choisis ici sont : clarté, logique et efficacité.

L'organisation de la présentation vise l'efficacité du discours mathématique. Elle peut être évaluée à partir de ce que l'élève présente devant la classe ou à partir d'un rapport écrit. Dans le premier cas, l'organisation relève de la communication orale; dans le deuxième cas, elle relève de la communication écrite. Que ce soit à l'oral ou à l'écrit, une évaluation convenable de l'organisation de la présentation doit tenir compte des deux éléments essentiels suivants : pertinence et qualité de la présentation, d'une part, et utilisation de différentes formes de communication, d'autre part.

Pertinence et qualité de la présentation

L'organisation de la présentation repose en grande partie sur un choix d'arguments et sur leur articulation. Pour faire un choix convenable, l'élève doit pouvoir distinguer entre des arguments qui sont clairs et d'autres qui ne le sont pas; de plus, l'élève doit pouvoir utiliser des arguments logiques et reconnaître ceux qui sont efficaces par rapport au contexte.

Bien sûr, en examinant le niveau de compétence acquis par l'élève, il faut tenir compte de son développement intellectuel. Par exemple, il est pratiquement impossible de s'attendre à ce qu'un élève du cycle primaire ou moyen puisse démontrer en détail certaines propriétés des nombres premiers (par exemple que l'ensemble de nombres premiers est infini). Par contre, cet élève pourra utiliser des concepts qui sont à sa portée pour exprimer une propriété mathématique générale ou pour donner des raisons de l'impossibilité d'une situation à se produire. Ainsi, lors de l'étude d'une régularité, des élèves de 1re et de 2e année ont utilisé un argument de parité de nombres pour expliquer de façon efficace que le nombre 27 n'appartient pas à la suite 8, 10, 12… (voir chapitre 5). Ces enfants ont également dû discuter longuement pour commencer à distinguer ce qu'est un argument juste, clair et complet.

Utilisation de différentes formes de communication

Le deuxième élément essentiel est le choix du « *médium* » utilisé pour organiser la présentation d'une communication. Il y a, en mathématiques, plusieurs systèmes de signes. Il y a, par exemple, le système algébrique (formules, équations); le système de représentations graphiques (pictogrammes, divers types de diagrammes, système cartésien, etc.); la langue (écrite et parlée); il y a également un autre système de signes très important et paradoxalement très ignoré : celui des gestes (nous verrons plus loin, au moment de la présentation de quelques exemples concrets tirés de la salle de classe, l'importance que le système de gestes joue dans la production du sens en mathématiques).

En général, chaque système de signes possède un champ de significations qui lui est propre. Par exemple, un dessin exprime des aspects qui sont propres à la pensée figurale et à son mode d'appréhension globale. Un texte exprime des aspects qui sont propres à la pensée verbale et à son mode d'appréhension linéaire et séquentielle. Dans le cas des mathématiques, souvent un résultat peut être mieux compris si on utilise plusieurs systèmes de signes. Ainsi, la solution d'un système d'équations linéaires peut être mieux comprise si, en plus de la solution algébrique usuelle, on utilise une représentation graphique qui souligne une relation qualitative et globale entre les variables.

Notons qu'habituellement le critère « organisation de la présentation » examine le choix *final* des arguments et des moyens de les présenter. Or, s'il s'agit de la présentation d'un travail fait en groupe, ce critère ne nous renseigne pas sur l'engagement de l'élève à la communication avec ses coéquipiers. Les deux critères ci-dessous ont pour but de nous fournir une idée de l'engagement de l'élève à la communication orale pendant le travail en groupe et au cours de discussions générales en salle de classe.

ENGAGEMENT AU DIALOGUE

Avec clarté, pertinence et profondeur, l'élève exprime des propos ou présente des arguments pour faire valoir ses points de vue mathématiques.

L'engagement au dialogue examine le degré de participation de l'élève à l'activité communicative. On mesure l'engagement de l'élève en vertu de trois descripteurs : la clarté, la pertinence et la profondeur des arguments ou propos exprimés.

CONSIDÉRATION DES ARGUMENTS ET DES PROPOS DES AUTRES

L'élève est à l'écoute des arguments ou des propos des autres; il ou elle donne suite aux arguments ou propos de ses pairs.

Ce critère porte sur l'ouverture d'esprit que montre l'élève au cours de l'activité discursive. Il exige de l'élève un niveau de socialisation important et une « décentration » (c'est-à-dire une prise de distance) par rapport à ses propres points de vue. Ce critère porte également sur la contribution que peut faire un élève aux propos mathématiques énoncés par ses pairs, en les poursuivant, en les approfondissant ou éventuellement en les réfutant. Les descripteurs retenus ici sont : l'efficacité, la logique et la pertinence.

La section suivante aborde le problème de l'évaluation de la compétence Communication.

3. Grille permettant d'évaluer la compétence en communication

La grille d'évaluation que nous proposons tient compte des quatre critères dont nous venons de discuter. Elle est divisée en quatre niveaux, selon le programme-cadre de mathématiques de l'Ontario. La grille doit être pensée comme un outil destiné à rendre compte du niveau de rendement de la compétence que l'élève a atteint à un moment donné de son développement. Elle veut être un outil tant pour l'enseignante ou l'enseignant que pour l'élève en ce qu'elle suggère des pistes aux deux parties pour approfondir la maîtrise de la compétence. Par exemple, si un élève est considéré comme ayant atteint le niveau 2, la grille renseigne l'élève et l'enseignante ou l'enseignant sur ce qui manque à l'élève pour se rendre au niveau suivant. Vue sous cet angle, la grille n'est pas tant un instrument de jugement qu'un projet d'action – un projet conjoint, qui doit être mené par l'élève et son enseignante ou enseignant. Un exemple d'application de la grille est donné au chapitre 9.

Grille d'évaluation : Compétence : *Communication en mathématiques*

Critères	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Syntaxe et symboles L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **clarté et exactitude**.	L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **peu de clarté et d'exactitude**.	L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **une certaine clarté et exactitude**.	L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **clarté et exactitude**.	L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **beaucoup de clarté et d'exactitude**.
Organisation de la présentation Avec **clarté**, **logique et efficacité**, l'élève organise, présente et appuie ses idées à l'aide de différentes formes de communication (p. ex., projets, diagrammes, croquis, dessins).	À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **peu de clarté**, **de logique et d'efficacité**.	À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec une **certaine clarté**, **logique et efficacité**.	À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **clarté**, **logique et efficacité**.	À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **beaucoup de clarté**, **de logique et d'efficacité**.
Engagement au dialogue L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques **avec clarté**, **pertinence et profondeur**.	L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **peu de clarté**, **de pertinence et de profondeur**.	L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec une **certaine clarté**, **pertinence et profondeur**.	L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **clarté**, **pertinence et profondeur**.	L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **beaucoup de clarté**, **de pertinence et de profondeur**.
Considération des arguments et des propos des autres L'élève est à l'écoute des arguments ou des propos des autres et, avec **efficacité**, **logique** et **pertinence**, donne suite aux arguments ou propos.	L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **peu d'efficacité**, **de logique et de pertinence**.	L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec une **certaine efficacité**, **logique et pertinence**.	L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **efficacité**, **logique et pertinence**.	L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **beaucoup d'efficacité**, **de logique et de pertinence**.

Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, ni les éléments à caractère social de la communication, regroupés principalement dans les critères 3 et 4 ci-dessus, ni les éléments à caractère conceptuel-culturel (comme ceux qui déterminent la qualité mathématique d'un argument), regroupés surtout dans les critères 1 et 2, ne vont de soi pour les élèves. Cela signifie que les enseignantes et enseignants devront mettre sur pied des leçons qui aideront l'élève à s'engager dans l'activité discursive

et à comprendre progressivement ce que veut dire un bon argument mathématique. La question qui se pose maintenant est la suivante : comment le faire?

Dans le chapitre suivant, nous proposons quelques éléments de réponse. Nous commençons par proposer une liste d'objectifs qui ont trait à la communication et qu'on peut utiliser comme point de repère au moment d'élaborer une leçon de mathématiques. Par la suite, nous proposerons quelques idées pédagogiques concrètes pour encourager la communication en salle de classe.

4. Pour en savoir plus…

Pinsonnault, D. (2002). « Approche par compétences et culture disciplinaire dans le domaine des sciences, des mathématiques et de la technologie ». *Vie pédagogique*, n° 123, mai 2002, p. 34-37.

Scallon, G. (2004). *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. Ville Saint-Laurent (Québec) : Éditions du renouveau pédagogique.

Vergnaud, G. (2001). « Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance ». Dans J. Portugais (dir.), *Actes du colloque GDM*, Université de Montréal.

Chapitre 3

Mise en place et gestion de la communication

Plan du chapitre

1. Quelques objectifs clés de la communication
2. L'organisation du travail en salle de classe
3. Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant
4. Pour en savoir plus...

1. Quelques objectifs clés de la communication

À la fin du chapitre précédent, nous avons abouti à la question du choix des conditions que devraient remplir les stratégies d'enseignement afin d'amener les élèves à s'engager dans l'activité discursive et à produire des arguments mathématiques appropriés. Pour répondre à cette question, la première étape consiste à identifier quelques objectifs clés de la communication. La liste d'objectifs ci-dessous n'est pas exhaustive. Elle contient des objectifs qui font appel à un ou à plusieurs critères mentionnés au chapitre 2. Les différents éléments de la liste peuvent servir à cerner ce qu'on attend des élèves en matière de communication; ils peuvent servir également de point de départ à la conception d'activités que l'enseignante ou l'enseignant proposera en salle de classe.

1. utiliser les concepts, la terminologie, les symboles et les conventions mathématiques qui correspondent au cycle d'études;
2. écouter les propos mathématiques de ses pairs;
3. interpréter les arguments mathématiques de ses pairs;
4. évaluer de façon critique les arguments des autres;
5. réfuter un argument inexact;
6. exprimer des arguments mathématiques appropriés à une situation mathématique donnée en utilisant les concepts et les symboles mathématiques correspondants;
7. présenter des justifications mathématiques aux arguments avancés en utilisant différents systèmes de signes (formules, graphiques, diagrammes, tableaux) et objets ou artefacts (calculatrices, ordinateurs, trousses de solides géométriques, balances à deux plateaux), au besoin;
8. faire la distinction entre un argument exact, un argument clair et un argument suffisant;
9. organiser avec logique et efficacité la présentation du résultat d'une activité mathématique.

L'objectif 1 relève du critère « Syntaxe et symbole ». Les objectifs 2, 3, 4 et 5 relèvent du critère « Considération des arguments et des propos des autres ». Les objectifs 6, 7 et 8 relèvent du critère « Engagement au dialogue ». L'objectif 9 appartient au critère « Organisation de la présentation ». Selon le contexte de l'activité, les objectifs 1, 6, 7 et 8 peuvent aussi être inclus dans le critère « Organisation de la présentation ».

Naturellement, certains des objectifs de la liste précédente sont impossibles à atteindre aux cycles préparatoire ou primaire. Aussi, dans les chapitres qui suivent, trouvera-t-on les objectifs (adaptés, au besoin) qui, d'après nous, pourraient être ciblés selon le cycle d'études. Par exemple, le chapitre 4 contient, entre autres, une liste d'objectifs pour le cycle préparatoire; le chapitre 5 contient une liste d'objectifs pour le cycle primaire, etc.

Comment peut-on utiliser les objectifs précédents de façon concrète en salle de classe? La section qui suit apporte une réponse à cette question importante.

2. L'organisation du travail en salle de classe

Dans notre quête sur les conditions idéales pour amener les élèves à maîtriser les différents critères de la compétence Communication, l'étape ci-après consiste à choisir :

– la stratégie d'enseignement et

– l'activité de salle de classe.

L'activité en salle de classe (parfois appelée « tâche ») se rapporte au contenu mathématique visé; elle correspond à ce qu'on demandera aux élèves de faire.

La stratégie d'enseignement correspond à la manière dont les différentes étapes de l'activité seront accomplies. Indépendamment du choix, la stratégie d'enseignement devra permettre un échange d'idées et de points de vue entre les élèves et un examen critique de leurs arguments et des arguments des autres.

Les principes qui guident les choix de l'activité et de la stratégie d'enseignement dépendront du cycle d'études. Les chapitres 4 à 8 seront consacrés à un cycle en particulier; on y trouvera des exemples de stratégies d'enseignement et d'activités, illustrés par des données tirées d'une salle de classe correspondant au cycle en question. Contentons-nous ici de dégager les grandes lignes des stratégies d'enseignement et des activités à donner aux élèves.

Les stratégies d'enseignement

Les stratégies d'enseignement doivent répondre aux objectifs de communication visés. Elles doivent également prendre en compte le niveau de socialisation et de développement cognitif de l'élève.

Au cycle préparatoire, des discussions en groupe, dirigées par l'enseignante ou l'enseignant, et de courtes périodes de travail en petits groupes sur des activités simples peuvent être utilisées. Au cycle primaire, les occasions d'un travail conjoint et d'interaction s'amplifient. La maîtrise plus avancée de la langue parlée et écrite, d'une part, et la socialisation atteinte par l'élève, d'autre part, permettent, en effet, à l'élève du cycle primaire d'envisager des échanges plus soutenus avec ses pairs.

Voici une liste de stratégies qui favorisent l'atteinte des objectifs de la communication :

Stratégie 1

Travail en petits groupes en vue de résoudre certains problèmes mathématiques donnés par l'enseignante ou l'enseignant.

Stratégie 2

Travail en petits groupes, comme nous l'avons indiqué dans la stratégie 1, suivi d'une discussion dirigée par l'enseignante ou l'enseignant entre tous les groupes de la classe afin de discuter des solutions trouvées et de les comparer.

Stratégie 3

Travail en petits groupes pour que les élèves formulent des hypothèses, les testent et les évaluent. Les résultats des élèves sont présentés sous forme de rapport écrit.

Les deux premières stratégies sont bien connues. La stratégie 2 a été au cœur des travaux sur l'argumentation, le raisonnement déductif et la démonstration, travaux menés depuis les années 1980 par plusieurs écoles françaises de didactique des mathématiques[14].

La stratégie 3 est intéressante si le travail présenté est l'aboutissement d'un travail de groupe dans lequel les élèves ont été amenés à formuler des hypothèses, à en discuter et à les vérifier ainsi qu'à se mettre d'accord sur les arguments et les moyens les plus pertinents pour convaincre leur auditoire. La stratégie est intéressante pourvu que la présentation du travail accompli donne effectivement lieu à un échange avec toute la classe. Pour ce faire, les autres groupes devront avoir l'occasion de réagir aux résultats et aux arguments contenus dans le rapport soumis par le groupe en question. Sous ces conditions, la stratégie prend une valeur indéniable du point de vue de la communication.

Mentionnons enfin une autre stratégie qui est celle que nous avons utilisée dans l'élaboration des leçons pour les cycles primaire, moyen, intermédiaire et supérieur, dont il sera question aux chapitres suivants. Celle-ci a l'avantage de se prêter à plusieurs variantes selon l'année d'études (se reporter à une discussion plus détaillée au chapitre 8). *Grosso modo*, la structure générale est la suivante :

Stratégie 4

4.1 Présentation par l'enseignante ou l'enseignant de l'activité mathématique à faire.

4.2 Travail en petits groupes ayant pour but la discussion et l'obtention de résultats qui doivent être soigneusement justifiés à l'aide d'arguments mathématiques convaincants.

4.3 Échange entre les groupes des résultats obtenus et des justifications fournies. Étude des solutions et des arguments fournis par les autres groupes.

4.4 Rencontre entre les groupes qui ont échangé leurs solutions afin de discuter des points forts et des points faibles des solutions et de leurs arguments.

4.5 Retour au travail en petits groupes pour re-rédiger les solutions et les arguments mathématiques de façon plus raffinée, en tenant compte de la discussion faite avec les autres groupes.

4.6 Discussion menée par l'enseignante ou l'enseignant à propos des résultats obtenus.

Nous concevons chacune des stratégies précédentes comme des actions pédagogiques visant à créer des possibilités de développement conceptuel en salle de classe. En effet, ces stratégies offrent aux élèves l'occasion d'accroître leur niveau conceptuel en leur permettant d'arriver à des conceptualisations qui seraient plus difficiles ou carrément impossibles à atteindre s'ils travaillaient seuls.

Comme le suggérait Vygotski, le niveau de développement conceptuel d'un élève lui permet de résoudre certains problèmes de façon autonome. Un des buts de l'enseignement est justement d'amener l'élève à faire face à des problèmes dont les solutions sont au-delà de son niveau conceptuel actuel, mais qui deviennent à sa portée grâce à un travail de collaboration avec ses pairs ou avec l'enseignante ou l'enseignant.

---

14 Voir, par exemple, G. Arsac *et al.* (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : Presses universitaires de Lyon. Il y a tout de même une différence entre la stratégie 2 mentionnée ci-dessus et celle utilisée par les écoles françaises. Dans les situations de salle de classe de ces dernières, l'activité débute par un travail individuel. Vu les objectifs que nous poursuivons, vu la conception de la relation entre communication et apprentissage que nous prônons (voir chapitre 1) et vu l'accent que nous mettons sur la nature sociale de la pensée, la phase du travail individuel n'a pas d'intérêt particulier pour nous ici.

Bien sûr, le niveau de développement conceptuel atteint à un moment donné délimite ce qu'un élève peut apprendre à ce moment-là. On ne peut pas penser à enseigner les subtilités du langage algébrique à un élève de la première année. Mais entre ce que l'élève peut faire sans aide et ce qui lui est absolument impossible à apprendre au moment en question, il y a une zone intermédiaire : c'est la zone de ce qui n'est pas tout à fait très distant du niveau conceptuel actuel de l'élève et qui peut devenir réalisable si une aide lui est apportée. Cette zone intermédiaire est ce que Vygotski appelait la « zone proximale de développement » (voir Figure 1, où nous illustrons cette idée à l'aide d'un diagramme de Venn).

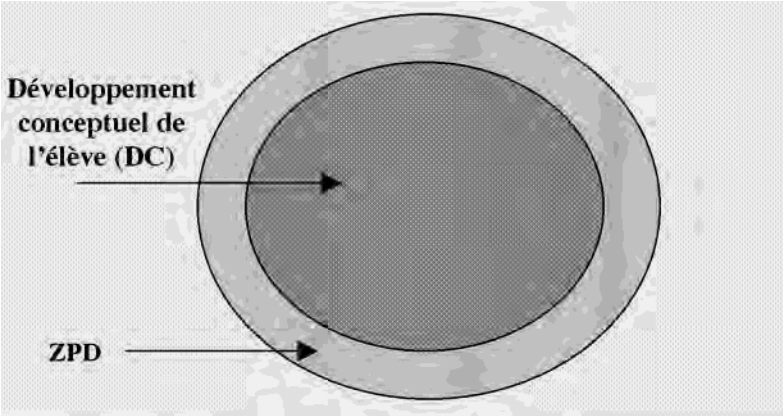


Figure 1. La petite ellipse représente les problèmes et les situations que l'élève peut affronter individuellement avec succès à un certain moment de son développement conceptuel (DC). Au-delà de cette ellipse se trouve une zone constituée de problèmes que l'élève peut réussir à résoudre en collaboration avec ses pairs ou l'enseignante ou l'enseignant. C'est la *zone proximale de développement* (ZPD). Au-delà de cette zone se trouve tout ce qui est définitivement au-delà du développement conceptuel de l'élève au moment en question.

La stratégie numéro 4 présentée ci-dessus peut être considérée comme donnant lieu à un emboîtement de zones proximales de développement. À chaque étape, les élèves arrivent à élargir leur zone proximale de développement précédente. On aurait alors une séquence d'ellipses à peu près concentriques, comme le suggère la figure 2.

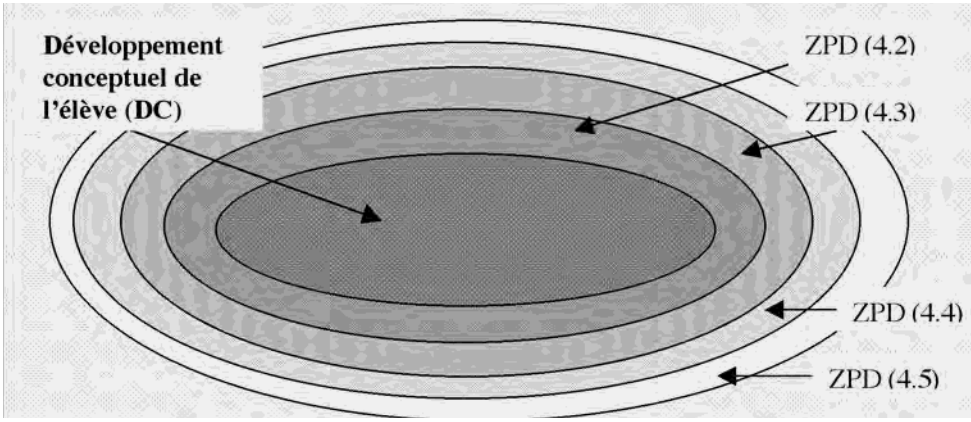


Figure 2. La stratégie d'enseignement 4 en tant que productrice d'un emboîtement de zones proximales de développement. La région ZPD (4.2) correspond à la zone proximale de développement générée par l'étape 4.2 de la stratégie 4. La région ZPD (4.3) correspond à celle générée par l'étape 4.3, etc.

Le choix de l'activité mathématique

Le choix adéquat d'une stratégie d'enseignement ne saurait suffire à garantir l'acquisition et la maîtrise des critères qui composent la compétence Communication chez l'élève. Il faut prévoir soigneusement l'activité mathématique. Aux termes de la discussion précédente, on peut dire qu'il faut que l'activité se trouve dans la zone proximale de développement des élèves. Si l'activité est trop simple, la discussion en petits groupes n'a pas de sens. Les élèves vont répondre rapidement aux questions, et la collaboration ne sera pas sollicitée. Si l'activité est trop complexe, si elle se trouve au-delà de la zone proximale de développement des élèves, le travail en groupe ne donnera pas de résultat.

En plus de répondre aux exigences définies par le développement conceptuel des élèves, l'activité doit avoir recours à des problèmes qui éveillent la curiosité des élèves et qui stimulent leur besoin de décrire, de justifier, d'expliquer et de créer[15].

Dans les chapitres qui suivent, nous donnerons un exemple d'activité par cycle et nous illustrerons l'activité à l'aide d'extraits du travail en petits groupes. Pour l'instant, occupons-nous du rôle de l'enseignante ou de l'enseignant.

3. Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant

À la suite des résultats obtenus lors d'une recherche longitudinale menée dans une classe de 2e année, Wood remarque que, à ce moment de leur scolarisation, les élèves peuvent apprendre les fondements de ce que deviendra, plus tard, l'argumentation mathématique proprement dite[16]. Les jeunes élèves peuvent commencer à prendre conscience que, en mathématiques, la validation d'idées est basée sur certains types de raisonnements. Comme le montre Wood, pour en arriver là, l'enseignante ou l'enseignant doit amener les élèves à apprendre à écouter – à être des « écouteurs actifs » – et à manifester leur désaccord. Dans la même veine, McClain et Cobb soulignent l'importance de l'enseignante ou de l'enseignant dans le processus de socialisation de l'élève et de sa prise de conscience du type de raisonnement et d'argumentation qu'on lui demande en mathématiques[17].

La maîtrise de l'argumentation mathématique est un processus très long dans le développement conceptuel de l'élève. Souvent, l'élève se contente d'appuyer et de valider ses arguments en ayant recours à la perception et à des exemples concrets. En effet, comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent, l'élève restera longtemps pris dans un empirisme naïf contre lequel devra lutter tenacement l'enseignante ou l'enseignant des cycles intermédiaire et supérieur, car c'est à ce moment que l'élève commence à prendre conscience que, en mathématiques, comme disait Pascal en 1655, on ne consent qu'aux vérités dûment démontrées[18].

À la lecture des chapitres qui suivent, on verra qu'au fur et à mesure que l'élève apprend à écouter, à tenir des propos et à interagir le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant change. Alors que chez les élèves plus jeunes, l'enseignante ou l'enseignant interagit souvent, chez les plus âgés, elle ou il devient de

15 Voir C. Greenes, L. Schulman and R. Spungin. (1992, October). "Stimulating communication in Mathematics". *Arithmetic Teacher*, 77-82.

16 T. Wood. (1999). "Creating a context for argument in mathematics class". *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 171-191.

17 K. McClain and P. Cobb. (2001). "An analysis of development of sociomathematical norms in one First-Grade Classroom". *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (3), 236-266.

18 B. Pascal. (1655). *De l'esprit géométrique*. Paris : Aubier, 1955.

moins en moins sollicité. Cela ne veut pas dire pour autant que ses responsabilités sont moindres. L'importance d'être à l'écoute de ce dont les élèves discutent est un point à prendre en compte. À l'aide de la supervision continuelle de la discussion des élèves, l'enseignante ou l'enseignant peut mieux formuler des questions, faire des commentaires, émettre des doutes et suggérer d'autres pistes de recherche[19].

Or, les questions que l'enseignante ou l'enseignant pose doivent être pertinentes : elles doivent amener les élèves à réfléchir de façon mathématique. Comme dit une enseignante du cycle moyen, si on veut empêcher les élèves de penser mathématiquement, on peut poser des questions auxquelles on répond par un seul mot (« oui », « non », « 15 », « une droite », etc.). Si, par contre, on veut que les élèves s'engagent dans une véritable discussion mathématique, il faut s'y prendre différemment.

Mewborn et Huberty proposent une liste de différents types de questions que peut poser l'enseignante ou l'enseignant . En voici quelques exemples :

– Qu'est-ce que vous pensez de ce que Janine a dit?
– Est-ce que quelqu'un a trouvé une autre façon?… Quelle est la différence? Y a-t-il une façon qui est meilleure? Pourquoi?
– Est-ce que vous pouvez nous convaincre que cela est vrai?
– Est-ce que ce que Pierre dit est vrai dans tous les cas?
– Comment est-ce que vous pouvez prouver cela?[20]

Si, donc, poser de bonnes questions et intervenir sont des aspects précieux de la démarche pédagogique, *s'abstenir d'intervenir* est un aspect non moins important. En effet, l'enseignante ou l'enseignant doit souvent décider si c'est opportun d'intervenir à un moment donné dans la discussion entre élèves. Devrait-elle ou devrait-il suggérer une piste pour ranimer une discussion qui semble être dans l'impasse? Il y a beaucoup de questions qui se posent dans un environnement discursif où le but n'est pas de discuter pour discuter, mais d'acquérir un savoir. Pédagogiquement parlant, une discussion mathématique n'a de sens que si elle mène à un produit en matière de savoirs escomptés. Mais, puisqu'il n'y a pas de route directe au savoir, il est inévitable que parfois les élèves empruntent des voies qui ne mènent pas à la solution du problème. Ces fausses routes ne doivent pas être perçues comme du temps perdu. Elles peuvent être l'occasion d'une réflexion intéressante. Par exemple, on peut demander aux élèves, après coup, de dire pourquoi une certaine marche à suivre empruntée s'est avérée inefficace. Et ce faisant, la discussion est relancée.

Nous aurons l'occasion de revenir sur le rôle de l'enseignante et de l'enseignant tout le long des chapitres qui suivent. Mais avant de passer au chapitre 4, insistons sur le point suivant : en plus d'être concepteur de l'activité mathématique et de veiller à ce que la communication reste fructueuse en salle de classe, l'enseignante ou l'enseignant joue un rôle tout particulier dans l'apprentissage que font les élèves. Comme le souligne Bartolini Bussi, l'enseignante ou l'enseignant est le représentant d'une culture mathématique à laquelle les élèves sont initiés suivant leur participation aux activités proposées[21].

---

19 C. A. Maher and A. M. Martino (1992). "Teachers building on students' thinking". *Arithmetic Teacher*, p. 32-37.

20 Adapté de : S. Mewborn and P. Huberty. (1999). "Questioning your way". *Teaching Children Mathematics*, 226-227 et 243-246 (numéro du mois de décembre).

21 M. Bartolini Bussi. (1998). "Verbal interaction in the Mathematics classroom: A vygotskian analysis". In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi et A. Sierpinska (dirs.). *Language et Communication in the Mathematics Classroom* (p. 65-84). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

L'enseignante ou l'enseignant veille à ce que les conceptualisations progressives des élèves s'enrichissent au cours de leur travail d'interprétation et de compréhension créatrice à la base de l'apprentissage et que ces conceptualisations acquièrent peu à peu l'objectivité culturelle du savoir.

4. Pour en savoir plus...

Berry, J., et K. Houston. (1995). "Students using posters as a means of communication and assessment". *Educational Studies in Mathematics*, 29, 21-27.

Cobb, P. (2002). "Reasoning with tools and inscriptions". *The Journal of the Learning Sciences*, 11 (2-3), 187-215.

Douek, N. (1999). "Argumentation and conceptualization in context: a case study in sunshadows in primary school". *Educational Studies in Mathematics*, 39, 89-110.

Headegaard, M. (1990). "The zone of proximal development as basis for instruction". In L. C. Moll (dir.). *Vygotsky and Education*. Cambridge: Cambridge University Press, p. 349-371.

Vacc, N. (1993, October). "Questioning in the Mathematics Classroom". *Arithmetic Teacher*, 89-91.

Vergnaud, G. (2000). *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps*. Paris : Hachette.

Schneuwly, B., et J.-P. Bronckart. (1985). *Vygotsky aujourd'hui*. Neuchâtel : Éditions Delachaux et Niestlé.

Tate, W. (1995). "Mathematics communication : Creating opportunities to learn". *Teaching Children Mathematics*, 344-349 et 369 (numéro du mois de février).

Tudge, J. (1990). "Vygotsky, the zone of proximal development, and peer collaboration: Implications for classroom practice". In L. C. Moll (dir.). *Vygotsky and Education* (p. 155-172). Cambridge: Cambridge University Press.

Zack, V., and B. Graves. (2001). "Making Mathematical meaning through dialogue: 'Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird'". *Educational Studies in Mathematics*, 46, 229-271.

Chapitre 4

La communication en mathématiques au cycle préparatoire

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle préparatoire
3. Quelles stratégies d'enseignement?
4. Un exemple de salle de classe : la syntaxe d'un tableau
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Quelques pistes d'intervention
7. Pour en savoir plus…

1. Introduction

C'est justement au cycle préparatoire que l'école commence la tâche importante qui consiste à mettre à la disposition de l'élève un savoir qui est l'aboutissement d'un long développement historique auquel ont contribué plusieurs cultures. S'il est vrai que les élèves n'arrivent pas à l'école sans connaissances préalables et que souvent ils savent même reconnaître certaines figures géométriques et compter un petit nombre d'objets, il est aussi vrai que, au moment où l'élève commence à fréquenter l'école, ses concepts « quotidiens » de nombre ou de figure se transforment en concepts « scientifiques »[22]. Alors que les concepts quotidiens restent prisonniers de la situation concrète où ils sont appelés à fonctionner – par exemple, on compte *ce* groupe d'objets ou *cet autre* groupe d'objets –, le concept scientifique s'insère dans un système organisé de manière très spécifique. C'est cette organisation, qui n'a rien de naturel, qui gouverne la logique de l'écriture des nombres en unités, en dizaines, en centaines, etc. Le passage d'un comptage concret qui aboutit à vingt-trois objets, à la prise de conscience que vingt-trois s'écrit à l'aide de deux signes « 2 » et « 3 » écrits selon un ordre précis, et que le symbole « 2 » signifie deux dizaines et le symbole « 3 » signifie trois unités, est un exemple parmi beaucoup d'autres du passage délicat du concept quotidien au concept scientifique[23].

Vygotski avait sans doute raison lorsqu'il remarquait que l'acquisition des concepts scientifiques exige une prise de conscience plus élevée que celle des concepts quotidiens. D'après l'exemple que nous venons d'évoquer, le rôle de la langue est fondamental dans cette prise de conscience. Comment, sinon à l'aide de la langue, faire référence à des catégories abstraites telles que les « unités » et les « dizaines »? Mais les symboles jouent aussi un rôle important. Ce sont les symboles qui prendront la place des actions et des objets concrets dans l'abstraction conceptuelle qu'accomplit l'élève.

Le développement des concepts scientifiques a lieu à l'école. Il se fait au moyen d'un travail de collaboration entre élèves et enseignante ou enseignant. C'est ici que la communication joue un rôle de première importance.

Or, à quel type de communication peut-on s'attendre au cycle préparatoire? Naturellement, la communication à laquelle les élèves du cycle préparatoire peuvent participer ne peut pas avoir la complexité de celle qu'on peut retrouver chez des élèves plus âgés. Il serait vain de vouloir promouvoir des discussions de longue haleine dans une classe de maternelle ou de jardin sur le sens de tel ou tel concept mathématique. Il serait également inutile de vouloir exiger de ces élèves une utilisation poussée des symboles mathématiques, lorsqu'on sait très bien qu'ils sont encore aux débuts du long processus d'apprentissage de l'écriture.

Il nous semble pertinent de viser, au cycle préparatoire, des stratégies de communication qui vont amener les élèves à tenir leurs premiers propos mathématiques. Il nous semble également important de commencer à viser le développement des éléments cognitifs et sociaux qui serviront d'assise aux critères de la compétence en communication au cycle primaire.

---

22 La distinction entre concepts quotidiens et scientifiques vient de Vygotski (voir *Pensée et langage*, p. 209). Pour une discussion contemporaine de la théorie du concept chez Vygotski, voir W. Wardekker. (1998). "Scientific concepts and reflections". *Mind, Culture, and Activity*, 5(2), 143-153.

23 La catégorisation des nombres en nombres pairs, impairs, positifs, négatifs, premiers, etc. ainsi que la reconnaissance de la propriété de commutativité de l'addition sont d'autres exemples du passage du concept quotidien du nombre au concept scientifique.

La section ci-dessous propose quelques objectifs qui peuvent s'avérer utiles au moment de choisir et de planifier les stratégies d'enseignement.

2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle préparatoire

En ayant présent à l'esprit les critères énoncés dans la grille d'évaluation présentée au chapitre 2, nous proposons que les efforts pédagogiques concernant la communication au cycle préparatoire visent les objectifs suivants :

– apprendre quelques conventions mathématiques (critère « syntaxe et symbole »);

– apprendre à tenir des propos mathématiques (critère « engagement au dialogue »);

– apprendre à écouter les autres élèves (critère « considération des arguments et des propos des autres »).

Pour arriver à ces objectifs, des stratégies d'enseignement adéquates sont nécessaires. Dans la prochaine section, nous discuterons de quelques éléments que l'on pourrait prendre en compte au moment du choix de la stratégie d'enseignement à suivre.

3. Quelles stratégies d'enseignement?

Souvent, les élèves se placent en cercle devant le tableau. L'enseignante ou l'enseignant discute alors avec les élèves, donne des consignes, offre des explications, pose des questions, etc. Cette stratégie pédagogique est sans doute bonne. Mais elle n'amène pas forcément à des situations où les élèves écoutent attentivement ce que disent leurs pairs. Cette stratégie risque, en effet, de s'enfermer dans un dialogue élève – enseignante ou enseignant, sans possibilités d'échanges importants entre les élèves eux-mêmes. On peut renforcer cette stratégie par un travail en petits groupes.

De façon plus générale, toute stratégie d'enseignement au cycle préparatoire devrait tenir compte des éléments suivants :

– **Conception de la dynamique de la communication**

  Pour encourager la communication entre élèves, il convient d'encourager le travail en petits groupes. Le travail en petits groupes peut aboutir à un produit élaboré ensemble (un dessin, une réponse, etc.). Un petit groupe peut, par la suite, aller rencontrer un autre petit groupe; les élèves sont ainsi amenés à comparer les solutions trouvées et à en discuter. Souvent, l'enseignante ou l'enseignant devra intervenir afin d'assurer la participation de tous les élèves. Il faudra se rappeler que certains élèves, tout en étant des « écouteurs actifs » (voir chapitre 3), ne s'engagent pas au dialogue dans un travail de groupe. Il est important, toutefois, d'encourager tous les enfants à prendre part à la discussion et à l'échange d'idées. Il faut également qu'ils commencent à comprendre qu'il y a une certaine façon de tenir des propos en mathématiques car, bien souvent, les petits enfants sont d'accord avec une idée parce qu'elle vient d'un ami.

– **Former les groupes de façon judicieuse**

  La taille des groupes dépend évidemment de l'activité que les élèves doivent accomplir. Puisque les activités au cycle préparatoire ne peuvent pas être trop complexes, les groupes peuvent se réduire à deux ou trois élèves.

– **Soutenir la communication à l'intérieur du groupe**

L'enseignante ou l'enseignant peut encourager les élèves à demander aux autres élèves d'expliquer leurs propos. De cette façon, les enfants apprennent à devenir critiques de façon constructive, à soutenir leurs propos, à solliciter des explications, etc.

Au fur et à mesure que la dynamique de travail en petits groupes s'installe en salle de classe, les élèves deviennent relativement plus autonomes et les objectifs de la communication sont plus faciles à atteindre.

Nous avons traité des caractéristiques de l'activité mathématique au chapitre 2. Rappelons ici que l'activité doit être suffisamment riche pour justifier un travail en petits groupes. Si l'activité est trop simple, il n'y aura pas de discussion. On voit ici comment la compétence Communication est intimement liée à la résolution de problèmes.

Pour donner une idée concrète de la façon d'encourager la mise en place et la gestion de la communication en classe de jardin, nous présentons ci-dessous un exemple. Par la suite, nous indiquerons quelques pistes supplémentaires concrètes qui peuvent aider les enseignantes et les enseignants à réussir la mise en place et la gestion de la communication dans leur classe.

L'exemple dont nous allons discuter faisait partie d'une leçon qu'on trouvera dans l'annexe, après le chapitre 10 (il s'agit de l'étape 4 de la leçon). La leçon visait les trois objectifs énumérés ci-dessus (section 2 de ce chapitre).

L'exemple commence par un court épisode où l'on voit l'enseignante et les élèves s'engager dans un dialogue où il est question d'apprendre à remplir un tableau et les conventions mathématiques associées. Nous mettrons en évidence certains moments de l'activité discursive des enfants et de l'enseignante ainsi que leur relation avec les objectifs de communication visés.

4. Un exemple de salle de classe : la syntaxe d'un tableau

L'exemple que nous allons présenter est tiré d'une leçon portant sur les domaines de Traitement des données et probabilités et de Numération et sens du nombre. Au cours de la leçon, les élèves ont été amenés à remplir un tableau à deux colonnes, en partant d'une situation contextuelle de résolution de problèmes. Dans l'exemple que nous présentons, le problème donné aux élèves consistait à trouver toutes les combinaisons possibles de blocs dans un sac, si l'on sait qu'il y a exactement cinq blocs dans le sac et qu'il peut y avoir seulement des blocs de deux couleurs : blancs et rouges.

A priori, le problème semble facile. Cependant, il pose des difficultés importantes aux enfants. Il s'agit d'un problème qui renvoie au concept scientifique de nombre : les enfants ne manipulent pas d'objets concrets; ils manipulent des représentations symboliques de nombres à l'intérieur d'un problème qui dépasse le cadre des concepts quotidiens. De plus, le problème amène les enfants à utiliser un tableau. Or, un tableau est un symbole mathématique très complexe. Remplir un tableau exige, en effet, la compréhension poussée d'une syntaxe qui est loin d'être évidente. Cette syntaxe indique la place précise que doivent occuper les nombres qu'on y insère. On pourrait dire que la difficulté qu'ont les élèves de jardin à comprendre la façon de lire et de remplir un tableau est semblable à celle qu'ont les élèves de 8e année lorsqu'il s'agit d'écrire une formule ou une équation.

En apprenant à remplir un tableau, les élèves de jardin commencent à apprendre des conventions mathématiques qu'ils utiliseront pendant toute leur scolarité. Ils commencent à apprendre ce qui sera nécessaire plus tard pour conceptualiser l'idée mathématique de variable.

Il y a donc deux problèmes conceptuels liés à l'activité proposée :

– produire toutes les combinaisons possibles de blocs dans le sac et

– inscrire ces combinaisons dans le tableau.

Nous avons décidé de ne pas séparer les deux problèmes conceptuels. Cette décision relève du choix didactique selon lequel le tableau est un outil qui permet d'organiser les stratégies de résolution de problèmes des élèves. Le tableau prend ainsi un sens précis.

Les élèves ont écouté les consignes pendant qu'ils étaient assis en cercle devant la classe. Ensuite, ils sont allés travailler à leur place. Les pupitres étaient installés pour former de petits groupes de trois élèves.

Les élèves dont il sera question ci-dessous sont, de gauche à droite : Renée, Sherry et Karl.

Consignes données par l'enseignante[24]

Bon, les amis, regardez en avant s'il vous plaît. On va faire une petite activité ensemble. Il y a cinq blocs dans un sac (*l'enseignante montre le sac*). Certains blocs sont rouges, d'autres sont blancs. En travaillant en équipe, je veux que [vous trouviez toutes] les possibilités, [c'est-à-dire] que vous trouviez combien de blocs rouges et combien de blocs blancs j'ai dans mon sac. Il y a plus d'une possibilité. Là, sans ouvrir le sac [vous allez trouver] les possibilités. Vous devez me les écrire ici (*l'enseignante montre une feuille sur laquelle on voit un tableau pareil à celui sur lequel les enfants écriront les possibilités*)… Est-ce que vous pouvez me donner une possibilité tout de suite? (*L'enseignante pose cette question pour s'assurer que les instructions ont été comprises.*) Une possibilité… et ensuite vous pouvez en trouver d'autres (*un élève lève la main*)… Oui, Pierre?

1. **Pierre :** Quatre rouges, et puis un blanc.

2. **Enseignante :** Excellent! Alors, là vous allez le faire en groupe de trois […]. Dans la colonne des rouges, tu écris le 4 et puis, dans la colonne des blancs, tu écris le 1… (*elle montre les colonnes sur sa feuille*) Gracielle, dépose tes deux pieds, tu vas tomber comme ça, on ne s'assoit pas comme ça, c'est dangereux… OK, vous allez écrire les possibilités… vous allez discuter ensemble…

Les élèves sont allés travailler aux tables installées par l'enseignante. On leur a fourni une page comprenant un tableau divisé en deux colonnes (« rouge » et « blanc », identique à celui montré par l'enseignante) et un crayon.

3. **Renée :** OK, donne le crayon… (*Elle enlève le crayon à Sherry, puis, en s'adressant à l'enseignante qui vient juste d'arriver pour voir le travail des élèves, elle dit :*) Où qu'on écrit?

24 Dans ce chapitre et les suivants, les consignes ainsi que les extraits de dialogue proviennent des transcriptions faites en partant de nos enregistrements vidéo. Pour des raisons déontologiques, partout dans le livre, nous avons dû changer les noms des élèves.

4. Enseignante : Ici, (*en montrant du doigt la première case du tableau*) tu écris rouge… donne-moi… une possibilité de combien… qu'il y en aurait dans le sac s'il y a cinq blocs en tout. (*Renée écoute attentivement et Sherry enlève en douceur le crayon de la main de Renée, alors que l'enseignante parle.*)

5. Renée : Cinq plus cinq.

6. Enseignante : (*En partant de ce que Renée a dit, même si ce qu'elle a dit n'est pas tout à fait exact, et en s'adressant à Renée, l'enseignante dit :*) OK, s'il y a cinq rouges… écris 5 ici. On va commencer avec cinq. (*Au moment où elle parle, Karl parle; l'enseignante se tourne vers Karl qui dit :*)

7. Karl : Non, non, on peut avoir trois rouges et deux blancs. (*Sherry allait écrire 5 sur le tableau lorsque l'enseignante lui dit :*)

8. Enseignante : Bon, écoute ce que Karl vient de dire... trois rouges... et deux blancs. (*Comme le choix de cinq blocs rouges semble être plus compliqué, car il mène à la considération qu'il n'y a aucun bloc blanc, l'enseignante laisse tomber l'idée de Renée et retient celle de Karl.*) (*voir Figure 1*)

9. Sherry : (*En répétant*) Trois rouges... (*elle s'apprête à écrire dans la 3e case de la 1re colonne*)

10. Enseignante : Il y en aurait deux blancs, écris-les ici dans la première case (*elle indique avec son doigt la place sur le papier où les enfants doivent écrire les numéros « 3 » et « 2 »*)... 3 ici et 2 là. (*elle indique avec son doigt la case correspondante, sur la première colonne* (*voir Figure 2*)*; les enfants remplissent la première ligne du tableau*) Là, il y a d'autres possibilités... trouvez les autres possibilités. Là, ça ne sera plus un 3! (*Avant de partir voir le travail des autres groupes, elle décide de faire revenir les enfants sur la première idée – celle de Renée correspondant à la combinaison 5-0.*) Il pourrait y avoir cinq rouges et combien de blancs?

11. Karl : (*en répondant immédiatement*) Zéro.

12. Enseignante : Ah! Écris ça... trouvez une autre possibilité... Sherry, écris 5 rouges et 0 blanc. (*L'enseignante va voir un autre groupe.*)

Figure 1. L'enseignante s'adresse à Sherry, qui allait écrire 5. (ligne 8)

Figure 2. Sherry allait écrire au milieu du tableau. L'enseignante montre avec sa main la place exacte où Sherry doit écrire le nombre 3.

Dans ce court extrait, nous voyons les trois élèves s'engager dans le dialogue. Mais ils s'engagent de façon différente. Renée pose une question et répond ensuite à une question posée par l'enseignante. Sa participation reste relativement limitée. Mais la question de Renée (ligne 3) montre bien la difficulté que présente la compréhension du tableau pour un élève de jardin. C'est ce que nous mentionnions plus haut. Or, l'enseignante veut que les enfants produisent eux-mêmes les données. Elle demande, par conséquent, aux élèves de lui donner un exemple. Sherry, qui a le crayon et la feuille dans cette partie de l'activité, suit bien le dialogue et fait bien son travail. Du point de vue de la communication, on peut dire qu'elle considère les arguments des autres (en l'occurrence, les arguments de Karl et de l'enseignante).

Karl intervient deux fois, et chaque fois il tient des propos qui sont décisifs pour résoudre le problème.

La suite de l'épisode montre encore une fois les trois critères précédents de la communication (c'est-à-dire apprendre quelques conventions mathématiques, apprendre à tenir des propos mathématiques et apprendre à écouter les autres élèves). On peut y voir la difficulté des élèves à comprendre où mettre les nombres sur le tableau, mais, puisque l'enseignante est partie, on voit les élèves aborder le problème *sans* l'aide de celle-ci.

13. Karl : (*Sherry a le stylo et la feuille; alors que Renée regarde, Karl pose son doigt sur la case à la troisième ligne et première colonne du tableau et dit :*) Cinq icitte.

14. Sherry : (*Elle regarde le tableau en voulant comprendre ce que Karl vient de dire; elle avait apparemment une autre idée; à la suite de l'intervention de Karl, elle fait un long geste de la main et dit avec désarroi :*) Ahhhhh! (*silence de plusieurs secondes*)

15. Karl : OK, mets un 0 dret là. (*Il indique la troisième ligne et deuxième colonne du tableau, voir Figure 3; Sherry va écrire 5 lorsque Renée prend le crayon par le haut et dit :*)

16. Renée : Une minute, je vais le faire.

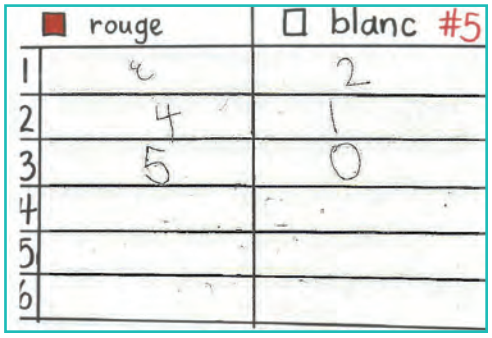
17. Karl : (*Il répète en indiquant avec son doigt la case où il dit qu'il faut écrire 0.*) Mets un 0 dret là (*Sherry, qui réussit à garder le crayon, écrit 0; quand elle termine, Karl continue*)… et puis mets un 4 dret là (*il indique avec son doigt la case à la 2e ligne et 1re colonne du tableau*) et puis un 1 là. (*il indique avec son doigt la case à la 2e ligne et 2e colonne du tableau*)

18. Sherry : Dret là?

19. Karl : Oui… 1 dret là.

20. Sherry : On a fait presque toutes les possibilités! (*voir Figure 4*)

Figure 3. Karl indique à Sherry la place, sur la deuxième colonne, où elle doit écrire le nombre 0, en montrant par là une compréhension sophistiquée de la syntaxe du tableau.



	rouge	blanc #5
1	3	2
2	4	1
3	5	0
4		
5		
6		

Figure 4. Le tableau rempli avec les trois premières possibilités trouvées par les élèves. (ligne 20)

Lors du dialogue précédent (lignes 3 à 12), les élèves avaient rempli la première ligne. Ici, ils remplissent d'abord la troisième ligne, puis la deuxième ligne. C'est Karl qui tient les propos mathématiques; Sherry suit ce que Karl dit et s'acquitte bien de sa tâche. Renée veut participer (ligne 16), mais les autres élèves ne prêtent pas attention à ses intentions. « Écouter l'autre » apparaît, chez les élèves de jardin, comme une action sociale difficile à accomplir.

Il est intéressant de noter le niveau d'abstraction auquel les élèves parviennent. Karl ne mentionne plus, effectivement, les termes « rouge » ou « blanc », ce qui montre que la structure du tableau commence à devenir claire pour les élèves.

Malgré leurs efforts, les élèves ne peuvent pas trouver d'autres possibilités. L'enseignante décide alors de donner une piste aux élèves :

21. Enseignante : Quoi, si tu choisis cinq [blocs] blancs?

22. Sherry : Ohhhhh! (*Son visage s'illumine.*)

23. Enseignante : Est-ce qu'il va en rester des rouges? (*À ce moment, Sherry fait un geste de la tête pour dire non; pour l'encourager à continuer, l'enseignante répète la question, en s'adressant en particulier à Sherry.*) Si tu as choisi cinq blancs?

24. Karl : (*interrompt*) Non… il n'y a que cinq blocs.

25. Enseignante : (*Elle décide d'élaborer en partant de l'intervention de Karl.*) Oui, il y a seulement cinq blocs, alors comment on va l'écrire là? (*Karl comprend et, en prenant la page et en la plaçant devant Sherry, qui a le crayon, dit :*)

26. Karl : Mets un 5 ici! (*Et il indique avec son doigt la 4e ligne et 2e colonne du tableau.*)

27. Enseignante : Je pense qu'on devrait donner la chance à Renée, hein? (*L'enseignante place la feuille devant Renée, qui prend le crayon et s'apprête à écrire.*)

28. Karl : Je suis capable de le faire plus vite… (*En voyant Renée hésiter sur quoi et où écrire, il dit :*) écris 5 icitte.

29. Renée : 5 ici? (*Renée écrit le chiffre exactement à l'endroit indiqué par Karl qui, étant à l'autre bout de la table, n'arrive pas à poser son doigt sur le centre de la 2e colonne, voir Figure 5.*)

30. Karl : Et 0 à côté… 0 ici. (*il montre du doigt l'autre colonne; Renée écrit 0*)

Figure 5. Karl indique la case exacte du tableau où Renée doit écrire 5.

31. Enseignante : (*Pour attirer l'attention des enfants sur le fait qu'il y a une symétrie dans les combinaisons, elle dit :*) Mais là, c'est l'autre couleur (*pour indiquer la symétrie, elle fait un geste horizontal des deux mains : les mains se déplacent en sens opposé*)… là, il y a 5 (*elle pose son doigt sur le premier 5 du tableau*)… alors, ici (*elle pose son doigt sur le deuxième 5 du tableau*) celui-là peut avoir 5… les deux peuvent arriver! (*Elle fait un geste horizontal d'une main qui va de droite à gauche, pour indiquer la symétrie. L'enseignante part.*)

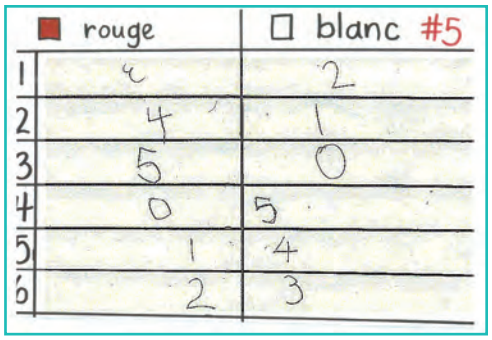


Figure 6. Le tableau tel qu'il est réalisé par les élèves.

32. Karl : (*En comprenant d'autres possibilités qui n'ont pas été mentionnées par l'enseignante, il dit très excité en signalant en même temps la case à la 5e ligne et à la 2e colonne :*) 4!… 4!… 4!… 4!… 4!… Non, icitte!

33. Sherry : (*Maintenant, elle voit la dernière combinaison possible.*) Là, mets un 3.

34. Karl : Je n'ai pas eu mon tour, je peux le faire plus vite, je sais plus. (*Il prend la feuille et le crayon et complète le tableau : il écrit 1 sur la 5e ligne et 1re colonne, puis 2 et 3 sur la dernière ligne du tableau.*)

35. Sherry : Quand va être mon tour?

36. Renée : Toi, t'as eu plus de tours que moi.

37. Sherry : Après, c'est mon tour.

38. Renée : T'as eu plus de tours.

39. Karl : Toi, t'as eu tout ça? (*Il indique les trois premières lignes du tableau.*)… Toi, t'as eu trois tours?

40. Renée : Toi, t'en as eu deux?

41. Sherry : Moi, j'en ai eu trois.

42. Karl : (*Il remplit en silence la dernière case du tableau.*) On a tout écrit. (*voir Figure 6*)

43. Sherry : Wowww!… Madame va être contente!

L'enseignante, par toutes ses questions, arrive à engager Karl dans un dialogue qui s'avère fructueux. Sherry ne participe pas directement au dialogue; mais elle écoute, elle suit et elle comprend, comme le suggère la ligne 33.

Renée participe en écrivant les nombres. Pour ce faire, elle communique avec Karl.

La dernière partie du dialogue met en évidence l'intérêt qu'ont les enfants à prendre part à l'activité. Écrire est, pour eux, très important. Mais cela exige la maîtrise de certaines habiletés de socialisation. Il faut apprendre à échanger, à écouter et à s'organiser à l'intérieur du groupe.

La communication repose en fait non pas uniquement sur des habiletés discursives ou cognitives relatives aux mathématiques, mais aussi sur des habiletés sociales de travail en groupe. La seule façon de développer ces habiletés est de participer à la communication.

5. Survol et synthèse générale de l'exemple

Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, lorsque nous avons présenté le principe de l'interdépendance cognitive entre concept et raisonnement, tout raisonnement repose sur un concept. Le raisonnement recherché ici était un raisonnement combinatoire. Le concept était celui de solution à un problème donné. Les élèves devaient trouver toutes les solutions au problème qui, formulé algébriquement, correspondait à l'équation $x + y = 5$; de plus, ils devaient inscrire chaque solution sur un tableau dont la syntaxe et le sens étaient difficiles à saisir.

Les extraits de la discussion des élèves donnent quelques idées des limites et des possibilités de la communication en classe de jardin. En ce qui concerne les limites, nous retrouvons un élément qu'a souligné Piaget, à savoir que, chez les jeunes enfants, la communication n'arrive pas à être un véritable « échange de points de vue avec effort pour motiver le sien et pour comprendre celui de l'interlocuteur », en se réduisant souvent à un « simple heurt d'affirmations contraires »[25]. Mais, en dépit de ces limitations, il y a toute une dimension sociale à laquelle l'enfant, en participant aux activités de groupe, commence à s'ouvrir et que Piaget semble avoir négligé dans ses analyses. Pour comprendre les possibilités de la collaboration et de la communication chez le jeune enfant, il ne faut pas voir la collaboration et la communication uniquement sous la forme du langage et de la logique de l'adulte. Il faut la voir dans la logique de l'action de l'enfant, déployée dans les gestes et les mots qu'elle ou il utilise dans son effort pour saisir les significations mathématiques que l'activité lui a offertes. En d'autres mots, la communication de l'enfant, à cet âge, obéit à un mode de discours qui lui est propre : son « texte discursif » est fait d'actions (p. ex., désigner une case du doigt) et de mots qui s'organisent dans le temps et dans l'espace selon une « logique » propre.

Les courts extraits que nous avons présentés montrent en particulier que, même si les enfants sont au début de leur apprentissage des mathématiques, la communication apparaît comme un moyen utile pour les amener à tenir des propos mathématiques, à approfondir leurs concepts et à échanger avec leurs pairs. Ainsi, si l'on considère l'extrait 2 (lignes 13 à 20), les élèves ont travaillé en groupe et, sans l'aide de l'enseignante, sont arrivés à accomplir une partie importante de la tâche demandée. En ce qui concerne les concepts vus au chapitre 3, on dirait que leur zone proximale de développement s'est élargie.

Au regard de l'approche de la communication prônée ici, il est important de reconnaître qu'il y a, à cet âge, plusieurs façons de participer à la communication : Renée aime bien écrire, Karl aime mener, Sherry se situe entre ces deux pôles. En général, certains enfants préfèrent s'exprimer devant un seul enfant ou devant un petit groupe; d'autres parlent avec facilité devant un grand groupe. Renée aurait sans doute participé davantage dans un groupe à deux élèves.

Mentionnons maintenant quelques pistes supplémentaires concrètes visant à faciliter la communication au cycle préparatoire.

---

25 J. Piaget. (1956). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Genève : Delachaux et Niestlé, p. 166.

6. Quelques pistes d'intervention

Syntaxe et symboles

– Demander à l'élève d'expliquer à la classe ce que signifie une expression mathématique.

  Par exemple, on pourrait demander à Renée d'expliquer à la classe ou à un autre groupe ce que signifient les nombres écrits sur la deuxième ligne du tableau produit par son équipe.

Engagement au dialogue

– Demander à l'élève de reformuler autrement ou d'expliquer aux autres membres du groupe une idée que cet élève aurait proposée au cours de la discussion.

– Demander à un élève de répéter une idée expliquée par un autre élève.

– Demander à un élève s'il ou elle est d'accord avec une idée proposée par quelqu'un d'autre et de justifier sa réponse.

Considération des arguments et des propos des autres

– Demander à un élève d'écouter ce que disent les autres élèves.

– Demander à un élève de dire s'il ou elle pense que ce qui vient d'être dit est juste.

7. Pour en savoir plus...

Donaldson, M. L. (1986). *Children's Explanations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schwartz, S., and A. Brown. (1995). "Communicating with young children in mathematics: A unique challenge". *Teaching Children Mathematics*, 350-353 (numéro du mois de février).

Chapitre 5

La communication en mathématiques au cycle primaire

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle primaire
3. Quelles stratégies d'enseignement?
4. Un exemple de salle de classe
   – L'apprentissage de la syntaxe
   – La distinction entre arguments clairs, justes et suffisants
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Quelques pistes d'intervention
7. Pour en savoir plus...

1. Introduction

Au chapitre précédent, nous avons vu comment de jeunes enfants sont amenés à collaborer entre eux pour résoudre un problème donné à l'intérieur d'une activité mathématique. Des activités comme celle que nous avons vue offrent à l'enfant l'occasion d'apprendre à s'insérer dans la vie sociale de la salle de classe. Ces activités sont aussi d'une extrême importance dans le développement cognitif de l'enfant. En effet, elles orientent son développement dans une direction que celui-ci ne suivrait pas si on laissait l'enfant suivre la direction que lui dicterait sa seule maturation biologique. En d'autres mots, les activités scolaires qu'on propose aux enfants ne font pas seulement augmenter la capacité cognitive de l'élève (p. ex., la capacité d'abstraction) en mettant à sa disposition des zones proximales de développement; ces activités impriment également des directions nouvelles au développement. Le rôle du langage et de la communication dans ce processus a été très bien souligné par Vygotski, qui a dit que : « le langage de l'entourage avec ses significations stables, constantes prédétermine les voies que suit le développement des généralisations chez l'enfant. Il lie l'activité propre de l'enfant, la canalisant dans un sens déterminé, rigoureusement défini. » (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 173.)

Or, en suivant les voies culturelles de développement cognitif ainsi tracées, l'enfant ne doit pas être considéré comme simple *assimilateur*, car

> tout en suivant cette voie déterminée, préétablie, l'enfant pense selon le mode propre à son stade de développement intellectuel. Les adultes, dans la relation orale avec lui, peuvent déterminer le cours du développement des généralisations et son terme, c'est-à-dire la généralisation qui en résulte. Mais ils ne peuvent lui transmettre leur mode de pensée. (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 173.)

C'est pourquoi « la thèse selon laquelle l'enfant acquiert dans le processus d'apprentissage scolaire les concepts tout prêts et les assimile comme on assimile n'importe quelle habileté intellectuelle est totalement dénuée de fondement ». (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 211.)

Au lieu de parler d'un processus d'assimilation chez l'élève, il est plus exact de parler d'un processus d'interprétation et de compréhension qui passe par un enrichissement de la signification donnée aux mots et aux symboles. C'est en fait dans l'enrichissement des significations premières de l'enfant et dans l'insertion de celles-ci dans des réseaux de sens culturels donnés aux mots et aux symboles que s'opère l'appropriation des concepts.

L'élaboration d'explications par les enfants de certains phénomènes, mathématiques ou autres, apparaît ici comme un élément clé de l'appropriation de concepts. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, concept et raisonnement sont intimement liés. Demander à l'enfant d'expliquer la solution à un problème, le mettre en situation d'argumentation, c'est l'amener à dégager des relations entre les objets du discours. En étudiant le développement de la pensée de l'enfant, tant Vygotski que Piaget ont mis en évidence chez les jeunes élèves un type de pensée dont le fonctionnement est guidé par un principe de

juxtaposition d'objets. Pour le jeune enfant, les objets entretiennent entre eux une relation d'appartenance ou de liaison et non pas d'inclusion. Ainsi, un bras dessiné à côté d'un bonhomme est conçu comme « allant avec » le bonhomme, et non pas comme « faisant partie » de celui-ci; un œil est souvent dessiné à côté d'une tête, etc. Cette pensée, qui juxtapose les objets et qui peut être repérée sur les dessins, réapparaît aussi dans le langage enfantin. Des termes linguistiques tels que *alors* n'expriment pas forcément chez les jeunes enfants une relation causale, mais plutôt le sens d'une co-occurrence d'événements. Bref, pour des enfants de 8 ans environ, « A alors B » signifie souvent « A et B »[26].

Amener l'enfant à expliquer la solution à un problème, c'est l'amener à prendre conscience d'un type de discours culturel, bâti sur des relations qui expriment une nécessité logique toute particulière et qui n'a rien de naturel. Il s'agit d'un discours qui véhicule une certaine vision du monde et qui le catégorise d'une certaine façon. Savoir argumenter, c'est savoir prendre place dans cette vision du monde en utilisant des modes de discours distingués, entre autres, par ce qu'on considère comme « évident », « essentiel », « contingent », etc.

Quels peuvent être, dans le contexte que nous venons de mentionner, les objectifs qu'on peut poursuivre en communication au cycle primaire? La section ci-dessous propose quelques éléments de réponse.

2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle primaire

Les efforts pédagogiques concernant la communication au cycle primaire doivent poursuivre et approfondir ceux qu'on fait au cycle préparatoire. Ainsi, en plus de viser les objectifs ci-dessous, propres au cycle préparatoire :

1. apprendre quelques conventions mathématiques (critère « syntaxe et symbole »),
2. apprendre à tenir des propos mathématiques (critère « engagement au dialogue »),
3. apprendre à écouter les autres élèves (critère « considération des arguments et des propos des autres »),

la communication en mathématiques vise, au cycle primaire, à faire en sorte que l'élève :

4. commence à élaborer des arguments mathématiques,
5. commence à comprendre ce qu'est un argument exact, clair et suffisant.

Les objectifs 4 et 5 peuvent relever du critère « engagement au dialogue » ou du critère « organisation de la présentation » selon l'activité mathématique donnée aux élèves.

D'après la liste d'objectifs énumérés ci-dessus, une différence importante entre le cycle préparatoire et le cycle primaire réside donc dans le fait que, dans le cycle primaire, des efforts systématiques seront faits en salle de classe pour amener l'élève à produire un discours oral et écrit comportant des arguments mathématiques explicites. L'élève sera également amené à prendre conscience que, entre plusieurs arguments mathématiques, il y a lieu de distinguer ceux qui sont clairs, exacts et suffisants. Il s'agit, en fait, du début d'un processus qui prend plusieurs années. Pour arriver à ces objectifs, des stratégies

26 Voir J. Piaget. (1956). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Genève : Delachaux et Niestlé, p. 180.

d'enseignement adéquates sont nécessaires. Le choix des stratégies d'enseignement est le but de la section suivante.

3. Quelles stratégies d'enseignement?

La maîtrise plus avancée de la langue parlée et écrite, d'une part, et de la socialisation qu'acquiert l'élève au cycle primaire, d'autre part, lui permet d'envisager des échanges plus soutenus avec ses pairs. Ces échanges permettent à l'enfant d'avancer dans son développement conceptuel. Une question qui a hanté Piaget toute sa vie était celle de savoir si c'est le développement logique qui permet une interaction sociale plus poussée ou l'inverse. À la fin, disait-il, ce sont les deux : « l'aspect social et l'aspect logique sont inséparables dans la forme comme dans le contenu[27] ». S'il y a quelque chose que montre clairement la psychologie de l'enfant, c'est ceci : « la logique n'est pas innée chez l'être humain, (…) elle se construit en fonction des rapports de réciprocité[28] ».

Quelles sont alors les conditions d'une communication adéquate en salle de classe? Le but de la communication n'est pas simplement de s'exprimer de façon claire et cohérente, soit oralement, soit par écrit. Bien que ce but soit des plus louables, la communication, comme nous l'avons souligné aux premiers chapitres, doit également être considérée comme une occasion d'établir des échanges à l'intérieur desquels les élèves s'approprient, dans la discussion, un savoir mathématique spécialisé. C'est ici que le rôle du langage et d'autres moyens d'expression (graphiques, symboles, etc.) est crucial.

La même stratégie utilisée au cycle préparatoire (voir chapitre 4) peut être utilisée ici. Mais, au cycle primaire, elle peut être enrichie grâce à la maîtrise plus grande de la langue écrite. Au cycle primaire, on peut, en effet, demander aux élèves de produire, au cours du travail en petits groupes, un texte qui explique clairement la solution à un problème posé. Les groupes peuvent procéder à un échange de textes afin d'en faire une évaluation critique. On peut même aller plus loin : à la suite de l'étude et de l'évaluation critique du texte d'un autre groupe, les élèves de deux ou trois groupes peuvent se rencontrer pour discuter des évaluations faites. Cette démarche favorise, chez l'élève, l'acquisition des critères « engagement au dialogue », « considérations des arguments des autres » et « organisation de la communication ».

En termes généraux, la stratégie proposée peut se résumer ainsi :

- Introduction (mise en situation) de la tâche mathématique par l'enseignante ou l'enseignant.
- Travail en petits groupes menant à la production écrite d'une ou de plusieurs explications raisonnées de solutions trouvées.
- Échange des productions écrites avec un ou plusieurs groupes.
- Évaluation critique des arguments mathématiques des autres groupes.
- Rencontre avec un ou plusieurs groupes pour discussion orale des textes écrits.
- Discussion générale.

---

27 J. Piaget. (1967). *Études sociologiques*. Genève : Librairie Droz, p. 90.

28 J. Piaget. (1967). *Études sociologiques*. Genève : Librairie Droz, p. 149.

Pour donner une idée concrète de la façon d'encourager la mise en place et la gestion de la communication au cycle primaire, nous présentons ci-dessous un exemple. Cet exemple met en évidence certains passages de l'activité discursive liés aux objectifs de la communication. À la fin du chapitre, nous indiquons quelques pistes supplémentaires concrètes qui peuvent aider les enseignantes et enseignants à réussir la mise en place et la gestion de la communication dans leur classe.

4. Un exemple de salle de classe

L'exemple dont nous allons discuter faisait partie d'une leçon préparée pour une classe à niveaux multiples de 1re et 2e année (on trouvera la leçon dans l'annexe, après le chapitre 10). Elle visait les cinq objectifs de la communication énumérés ci-dessus (section 2 de ce chapitre). Elle portait sur le domaine de modélisation et d'algèbre. Les attentes et contenus d'apprentissage étaient les suivants :

Attentes :

– Identifier la régularité dans une suite numérique et non numérique (1re année).

– Prolonger une suite en maintenant la régularité (2e année).

Contenus d'apprentissage :

– Identifier une régularité dans une suite numérique (1re année).

– Identifier et expliquer, à l'aide de matériel concret et semi-concret, la régularité dans une suite non numérique ou numérique (2e année).

La leçon a commencé par une mise en situation qui raconte les aventures d'un petit écureuil à la recherche de provisions pour l'hiver. Après la mise en situation, les élèves ont travaillé en petits groupes de 3. Leur tâche était de répondre à des « devinettes » concernant les provisions du petit écureuil.

Une feuille de route contenant les devinettes a été fournie à chaque élève. Les questions avaient été soigneusement formulées dans le but de favoriser la communication et l'argumentation à l'intérieur d'un même groupe ainsi qu'entre les groupes.

Même si chaque élève avait sa propre feuille, toutes les feuilles devaient être remplies après les discussions à l'intérieur du groupe. En raison de la méthodologie suivie, on s'attendait à ce que les explications fournies sur chaque feuille de route d'un même petit groupe soient similaires. Le but d'avoir trois feuilles de route par groupe était en fait qu'elles pourraient être utilisées plus tard pour mener à terme l'échange du travail accompli avec les autres groupes au moment de l'analyse critique des arguments élaborés par d'autres élèves.

Selon l'histoire racontée par l'enseignante lors de la mise en situation, l'écureuil découvre un trou dans un arbre et, à sa grande surprise, il y trouve huit arachides. L'écureuil décide d'y faire sa maison pour l'hiver. Il se donne la consigne de rapporter du parc deux arachides par jour (voir Figure 1). En sachant qu'il ne touche jamais à ses provisions d'hiver, dans les deux premières questions, les élèves devaient trouver le nombre total d'arachides constituant les provisions de l'écureuil après 6 jours, puis après 10 jours.

« L'écureuil a continué à marcher dans le bois. Il marchait… il marchait et, à un moment donné, il a vu un arbre avec un grand trou. L'écureuil est entré dans ce trou et a commencé à regarder partout. C'était très grand! Il a dit : « Wow! Cette maison est grande; je serais bien ici pour mettre mes arachides pour l'hiver ». Donc, il a commencé à regarder et, sais-tu quoi? il a trouvé huit arachides dans cet arbre! ».

Figure 1. L'enseignante en train de faire la mise en situation.

L'APPRENTISSAGE DE LA SYNTAXE

Pour aider les élèves à résoudre le problème, on avait dessiné un tableau sur la feuille (voir Annexe 2, après le chapitre 10). Comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, un tableau est un outil puissant de résolution de problèmes : il permet d'organiser l'information, de dégager des séquences, des modèles, etc. Un tableau est un outil puissant à condition, bien sûr, qu'on sache comment le remplir et comment l'interpréter; bref, à condition qu'on comprenne sa syntaxe. Or, l'extrait ci-dessous montre bien que la syntaxe d'un tableau ne va pas de soi. L'extrait provient du groupe 1 formé par Sandra, Louise et Anna.

1. **Sandra :** (*en s'adressant à Louise*) OK, commence!… Commence!… Commence!
2. **Louise :** Regarde, ça va par deux (*Elle remplit les premières cases de la première rangée intitulée « Nombre de jours » et écrit 2, 2, 2, puis elle dit :*) Non… pas comme ça.
3. **Anna :** C'est des bonds de deux.
4. **Louise :** (*Elle dit en frappant avec son doigt les cases de la première rangée l'une après l'autre :*) 8… 10…12… 14… 16… 18… 20… 22… (*Elle réfléchit un moment, puis elle dit :*) N'écris pas tout de suite!

Dès ces premières lignes, on voit que les élèves sont en train d'échanger des propos mathématiques. Les élèves savent qu'il faut compter par bonds de deux, mais elles ne savent pas comment remplir le tableau. Louise est arrivée à 22 arachides, mais elle ne sait pas comment mettre en correspondance directe les arachides comptées et le nombre de jours. Après quelques minutes d'hésitation, les élèves décident d'appeler l'enseignante :

5. **Louise :** (*en s'adressant à l'enseignante*) Je ne comprends pas…
6. **Enseignante :** Qu'est-ce que tu ne comprends pas? La question?
7. **Louise :** Oui.
8. **Enseignante :** J'ai demandé… regarde… ça, c'est le nombre de jours, hein? (*Elle indique aux élèves avec son index le 0 sur la 1re rangée du tableau, en utilisant la feuille de Louise.*) Il avait ça dans ses provisions. (*Elle indique la première case de la 2e rangée du tableau.*)
9. **Louise :** Huit. (*en se référant à la 1re case de la 2e rangée*)

10. Enseignante : Le deuxième jour, il en avait douze… le troisième jour, il en avait quatorze… (*au fur et à mesure qu'elle parle, elle indique avec la main l'association entre les nombres de la 1re rangée et ceux de la 2e rangée tout en ajoutant du rythme dans sa façon de prononcer les mots*) là, moi je te demande après six jours… il va y avoir combien (*d'arachides*) dans ses provisions? C'est ça, ce que je te demande. (*voir Figure 2*)

11. Louise : Ah, là je comprends! […]

L'engagement au dialogue change d'allure dès que l'enseignante arrive pour voir le travail du groupe. C'est Louise qui pose les questions. À la ligne 9, elle rend explicite l'information donnée par l'enseignante et, à la ligne 11, elle affirme avoir compris. Comme on le verra par la suite, la compréhension de la syntaxe du tableau est effectivement atteinte. Mais, avant de continuer, nous voulons nous arrêter sur ce qui rend la compréhension possible dans l'échange entre Louise et l'enseignante. En un sens, la réponse est évidente : l'enseignante a *montré* aux élèves *comment* remplir le tableau. Or, la question est : comment leur a-t-elle *montré* pour qu'elles comprennent?

Figure 2. L'enseignante indique la place réservée au nombre d'arachides. En faisant des gestes, la syntaxe du tableau est montrée aux élèves.

Cette question est importante dans une perspective d'enseignement qui vise à développer la compétence de communication. Peut-être qu'on commencera à prendre conscience de cette importance en remarquant que, pour communiquer, l'enseignante ne s'est pas limitée aux mots. Un des éléments les plus intéressants de la communication orale est que, même dans des situations relativement simples comme celle-ci, la langue orale s'appuie sur d'autres systèmes de signes pour rendre apparente une idée. Pour communiquer, on a recours à des gestes. Un geste indicatif – comme celui que l'on voit sur la figure 2 – attire l'attention sur ce qu'on veut rendre apparent. Les gestes sont des éléments essentiels à la production du sens en mathématiques. L'exemple précédent montre clairement comment les élèves arrivent à saisir le sens d'organisation des données dans le tableau en partant de gestes indicatifs, de mots (par exemple, le mot *ça*) et du rythme de la prononciation qui accompagne les gestes et les mots. En partant de cet amalgame de gestes, mots et rythmes, la syntaxe du tableau s'éclaircit pour les élèves qui, comme le montrera l'extrait suivant, peuvent maintenant continuer à remplir le tableau – un tableau qui devient ainsi un outil de résolution de problèmes. Ce qui est curieux dans cet extrait, c'est qu'il met en évidence quelque chose que, pourtant, nous faisons de façon naturelle : quand nous parlons, nous faisons des gestes. La curiosité et l'intérêt de l'extrait réside dans ceci : même si nous faisons des gestes lorsque nous parlons, nous ne sommes pas nécessairement conscients du rôle cognitif que jouent ces gestes. La prise de conscience du rôle cognitif que jouent les gestes peut nous amener à être plus vigilants quant à la façon de les utiliser en salle de classe, quand nous communiquons des idées abstraites ou des conventions sophistiquées comme celle de la syntaxe d'un tableau. « Les symboles et leurs significations, écrit Vygotski, peuvent initialement être tout à fait indépendants les uns des autres; et, dans ce cas-ci, le geste qui pointe établit la relation entre eux[29]. »

[29] L. S. Vygotsky. (1997). *Collected Works*. Edited by R. Rieber. New York: Plenum Press, vol. 4, p. 172.

Revenons maintenant à la suite du dialogue. L'enseignante vient de partir pour aller discuter avec un autre groupe.

12. Louise : (*En regardant sa feuille, elle dit :*) OK, regarde… (*elle écrit les nombres de jours en même temps qu'elle prononce les mots*) 4… 5… 6 (*au fur et à mesure qu'elle écrit les nombres, elle trace les lignes verticales du tableau*) et puis là ici (*en montrant la rangée du nombre d'arachides*) regarde quatorze. (*voir Figure 3*)

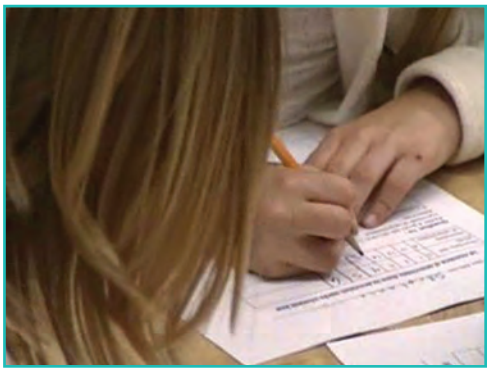


Figure 3. Louise a rempli la première rangée jusqu'au jour 6 et elle commence à écrire le nombre d'arachides sur la deuxième ligne.

13. Anna : (*en continuant les propos de Louise*) Seize.

14. Louise : C'est ça (…) 16… 18… 20… Oh! OK, c'est ça.

15. Anna : On va l'avoir mal, je le sais.

16. Sandra : Je ne sais pas.

17. Louise : Peut-être non.

Si, à la ligne 4, Louise était allée jusqu'à 22 « par bonds de deux », ici, elle est capable de mettre en correspondance le nombre de jours et le nombre d'arachides, ce qui lui permet de s'arrêter correctement à 20 arachides. Les lignes 12, 13 et 14 illustrent bien la coopération entre Anna et Louise. Il y a un engagement au dialogue. Louise tient des propos mathématiques; ces propos sont considérés par Anna qui leur donne suite à la ligne 13. Sandra, qui est une élève de 1re année, suit l'activité mathématique de ses collègues aînées.

Toutefois, à la fin de l'extrait, Anna et Sandra expriment des doutes sur la démarche (lignes 15 et 16). Louise, par contre, se montre plus optimiste (ligne 17). Ces lignes sont importantes, car elles témoignent de la mise en place progressive de ce qu'est un raisonnement mathématique. Le tableau permet d'organiser les données selon un certain raisonnement qui soulève encore des doutes chez Anna. Ce n'est que peu à peu que les élèves apprendront à faire un tri entre ce qu'on peut et ce qu'on ne peut pas utiliser dans les raisonnements mathématiques.

La question ci-dessous avait pour but d'amener les élèves à *expliquer* l'utilisation du tableau en partant d'un exemple concret. La question était la suivante :

« Le petit écureuil a maintenant 24 arachides dans ses provisions. À quel nombre de jours sommes-nous? Expliquez votre réponse en utilisant des arguments convaincants. »

La réponse, en fait, a été trouvée sans difficulté :

1. Anna : (*Elle lit la feuille*) 24 arachides dans ses provisions…

2. Louise : (*Elle continue la phrase d'Anna et, en lisant sur sa feuille, elle dit :*) À quel nombre de jours sommes-nous?

3. Sandra : 24.

4. Anna : Non, nous sommes jour huit… on est huit… on est jour huit aujourd'hui… on est jour huit.

L'explication s'est avérée beaucoup plus difficile :

5. Anna : Est-ce qu'on écrit juste 8, ici, madame? (*Elle fait référence à l'espace destiné à l'écriture de l'explication sur la feuille de route.*)

6. Enseignante : Non (…) il faut expliquer (…) Vous avez trouvé la réponse, c'est le jour huit. Comment t'as fait pour savoir ça?

7. Louise : Parce que…

8. Anna : Parce qu'il a ramassé 24 arachides et puis 24, le jour c'est huit. 24, jour huit.

9. Enseignante : Alors, dis-moi ça… écris-moi ça, si tu dis que c'est comme ça que tu l'as trouvé. Moi, je ne sais pas comment t'as fait pour le trouver. Comment t'as trouvé huit, Louise?

10. Louise : J'ai trouvé… j'ai… j'ai… humm (…) Je suis allée jour quatre (…) Et puis, là, je suis arrivée à jour huit.

11. Enseignante : Bon, c'est exactement ce que Anna vient de dire. Explique-le-moi, écris une phrase qui explique ça.

12. Louise : (…) Je suis allée regarder au nombre (…) 24 et après je suis allée regarder là. (*en se référant à la case où se trouve le jour 8*)

13. Anna : Il a ramassé 24 arachides le jour huit.

14. Louise : OK, j'écris, je suis allée regarder le nombre 24 et j'ai regardé au haut au nombre 8.

15. Sandra : Toi, tu dis beaucoup de choses.

Le texte produit par Louise est le suivant :

> *« Aujourd'hui, nous sommes le jour 8.*
>
> *Je suis allé (sic) regarder le nombre 24 et j'ai regarder (sic) en haut de 24. »*

On voit la difficulté à expliquer, par écrit, ce qui est pourtant facile à exprimer avec des mots et des gestes.

Un texte mathématique écrit est en fait la reconstruction d'une expérience. En général, le déploiement de l'expérience mathématique permettant d'arriver à la saisie d'un sens se fait à l'aide de mots généraux, appuyés par des gestes qui viennent indiquer, dans l'exemple pris en considération, les places du tableau pour lesquelles des mots techniques précis manquent encore (à la ligne 12, Louise utilise le mot *là*, c'est-à-dire un terme démonstratif qui indique l'endroit en question). Le passage de cette expérience vécue à sa reconstruction écrite est un élément important de la communication en mathématiques. Ce que ce dialogue montre (et on retrouve ce phénomène même chez les élèves plus âgés) est que le passage de l'activité discursive à l'écriture n'est pas évident. En abordant la question posée, les enfants « voient » sur le tableau qu'il y a une relation entre les jours et le nombre d'arachides; elles « voient » que le jour qui correspond à 24 arachides est 8. Mais l'élaboration du texte demeure encore difficile.

Les difficultés éprouvées par les élèves ne devraient pas induire à penser que des tâches comme celle-ci devraient être exclues du cycle primaire. Ce que l'analyse suggère, c'est qu'il faut bien comprendre les difficultés auxquelles se heurtent les enfants du cycle primaire en abordant des tâches comme celle-ci, qui permettent de mieux cerner les limites du possible dans l'activité communicative pour clarifier le type d'intervention pédagogique que l'on peut envisager en salle de classe. Nous reviendrons sur ce point à la fin du chapitre.

La question ci-dessous mettait les élèves dans une situation différente. Ici, il s'agissait de leur faire produire des arguments en partant d'une situation qui ne pouvait pas se produire. Voici la question :

> *Question 3 : « En sachant que l'écureuil ne mangeait pas d'arachides de ses provisions, je me demande si un jour dans ses provisions il a pu avoir exactement 27 arachides? Qu'est-ce que vous en pensez? Expliquez votre réponse, en utilisant des arguments convaincants. »*

16. Anna : Oui, il peut avoir (27 arachides).

17. Louise : Non, il ne peut pas en avoir *parce que*…

18. Anna : Ah, oui (il peut) *parce que* son trou est trop gros.

19. Louise : Non, mais ça veut juste… non, mais…

20. Anna : Oui! Ça va jusqu'à… ça va jusqu'à 28, *donc* oui… ça va jusqu'à 28, donc oui!

21. Sandra : Non!

22. Anna : Oui!

23. Louise : Ça ne peut pas, *car* c'est 2… 4… 6… 8… 10… 12… 14… 16… 18… 20… 22… 24… 26… 28.

24. Anna : Oh! (*Elle comprend l'argument de Louise et dit :*) Oui… OK… (*En reformulant l'argument pour elle-même, elle dit :*) Non, il ne peut pas.

25. Sandra : (*en répétant*) Non, il ne peut pas.

26. Louise : Il ne peut pas en manger une.

27. Anna : Manger une… non, il ne peut pas manger une. Louise, on fait toujours tes réponses!

28. Louise : Parce que vous autres, c'est trop court.

29. Anna : Ouin, pis?

30. Louise : Moi, je les rallonge!

Dans le passage précédent, on voit apparaître encore une fois le problème de la construction d'un argument mathématique. Anna a recours à un argument qui peut s'avérer exact dans d'autres contextes de la vie réelle. Pour avoir un certain nombre d'objets, il faut avoir un espace suffisant. Mais c'est

justement la délimitation entre ce qui peut être pertinent dans d'autres contextes et ce qui est considéré comme pertinent en mathématiques qui est en jeu ici. Louise élabore à la ligne 23 une *preuve mathématique directe* : elle compte par bonds de deux et montre concrètement que le nombre 27 n'est pas sur la liste. Anna comprend et change d'avis. Pour ce faire, Anna a dû montrer sa capacité d'être à l'écoute des arguments des autres et de les comprendre. Mais, puisqu'il existe toujours la possibilité que l'écureuil mange des arachides, dans les lignes suivantes, les élèves éliminent cette possibilité en mentionnant une des conditions sur lesquelles repose le problème : l'écureuil ne mange jamais d'arachides provenant de ses provisions.

Ce court extrait illustre un exemple de la façon dont l'argumentation mathématique commence à prendre forme. Le fait d'argumenter devient lié à la possibilité de se placer dans des situations hypothétiques définies par le contexte du problème. Dans cet ordre d'idées, l'apparition des relations causales « donc », « parce que », « car », que nous avons soulignées dans l'extrait précédent, est très importante.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, dans ses études sur le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Piaget avait remarqué que les jeunes enfants n'utilisent pas toujours de façon adéquate les termes qui indiquent des relations causales. Ainsi, par exemple, lorsqu'il demandait aux enfants de compléter la phrase « La $\frac{1}{2}$ de 9 n'est pas 4 parce que… », il y en avait qui disaient « parce qu'il compte mal ». Dans d'autres cas, les enfants ont recours à des justifications non mathématiques similaires à celle utilisée par Anna dans notre dernier exemple. Dans les expériences de Piaget, la phrase « Fernand a perdu sa plume, donc… », était parfois complétée comme suit : « Fernand a perdu sa plume, donc il l'a pas retrouvée[30]. »

LA DISTINCTION ENTRE ARGUMENTS CLAIRS, JUSTES ET SUFFISANTS

Au cours de la leçon, chaque groupe a échangé ses feuilles de réponses avec celles de deux autres groupes. Ainsi, le groupe d'Anna (groupe 1) a échangé une copie du travail fait avec l'équipe de Sandy-E (groupe 2) et une autre copie avec l'équipe de Marianne (groupe 3). Comme il y avait trois copies par groupe, chacun des groupes a gardé une copie de son propre travail.

L'enseignante a demandé aux élèves d'étudier, dans un premier temps, la question 2. Comme nous l'avons mentionné auparavant, le but de cette partie de l'activité était que les élèves réfléchissent sur l'explication fournie par les enfants d'autres groupes et qu'ils disent si l'explication était claire, juste et suffisante.

Les concepts d'explication claire, juste et suffisante ont été introduits au cours de la leçon que nous commentons ici. Voici un extrait de l'explication de l'enseignante :

> […] quand tu auras échangé ta feuille avec un autre groupe, on va aller voir la question 2 (…), tu vas regarder si la réponse est claire, (c'est-à-dire) si tu comprends ce qui est écrit là… Si c'est clair ce que dit l'ami ou

30 Voir J. Piaget. (1956). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, p. 35. C'est précisément en répondant à la question précédente (celle de trouver le jour qui correspond au nombre de 24 arachides) que nous trouvons une situation similaire dans un autre groupe (le groupe 2). L'enseignante demande : « Comment as-tu fait pour savoir (que c'était le jour 8)? ». Armand répond : « Après. (…) Ah hen… Le jour neuf, c'est l'automne! (…) Il se prépare pour jour 9 et 10 pour s'endormir, puis… ».

si ce n'est pas clair… Si tu lis (l'explication) et que tu ne comprends rien, bien (cela veut dire que) ce n'est pas clair (…).

(Est-ce que) c'est juste? (c'est-à-dire) est-ce qu'il a la bonne réponse? (…) Est-ce que (…) ce qu'il a répondu est correct?

Ensuite, est-ce qu'il a assez mis de choses pour que tu comprennes sa réponse? Est-ce que les mots sont suffisants? Est-ce qu'il a assez de mots? Est-ce qu'il a assez d'explications pour que tu comprennes sa réponse? (…) Sinon… (…) tu écris ce qui manque selon toi pour qu'il y ait une bonne réponse.

Les explications au problème 2 ont été les suivantes :

Groupe 1 : « Aujourd'hui, nous sommes le jour 8. Je suis allé (sic) regarder le nombre 24 et j'ai regarder (sic) en haut de 24. »

Groupe 2 : « (8 jour) »

Groupe 3 : « 8. Je suis àler (sic) regarder sur mon tableau. »

Voici un extrait de l'analyse des élèves du groupe 1 :

31. Louise : (*en lisant la réponse du groupe 2*) Je ne comprends pas ce qu'elle a écrit (…)

32. Anna : (*en lisant la réponse du groupe 3*) Ça ne fait pas de sens… « 8. Je suis allée regarder sur mon tableau. » Ça ne fait pas de sens… (*en s'adressant à Louise, qui lit la copie du groupe 2*) Est-ce que ça fait du sens?

33. Louise : Non, « 8 jours »… qu'est-ce qui manque? (…)

34. Anna : Qu'est-ce qui manque? Clair… juste… suffisant… je ne sais pas ce que je vais écrire… (…) Qu'est-ce qui manque? (*L'enseignante arrive juste au moment de la discussion, voir le groupe 1.*)

35. Enseignante : Bon, j'entends parler fort ici! (…) (*En lisant l'explication du groupe 2, elle dit :*) 8 jours, c'est quoi ça? huit jours… Louise? C'est quoi? C'est quoi, est-ce que c'est une explication? Est-ce que c'est une réponse ou quoi?

36. Louise : Une réponse.

37. Enseignante : On avait demandé « explique ta réponse ».

38. Louise : Non, ce n'est pas clair.

39. Enseignante : Bon, ce n'est pas clair. OK, écris. (*Louise écrit.*) Oui… bon, est-ce que c'est juste? Est-ce que c'est la bonne réponse?

40. Louise : Oui.

41. Enseignante : Bon, tu vas le marquer, c'est la bonne réponse. Et, est-ce qu'il y a assez de mots pour que tu comprennes?

42. Louise : Non.

43. Enseignante : Dis-moi ce qui manque.

44. Anna : Ce n'est pas clair… ce n'est pas clair… (…)

45. Enseignante : Ce n'est pas clair… bon, dis-moi, pourquoi ce n'est pas clair?

46. Louise : Parce que, il n'a pas assez de… ben… Je ne comprends pas, c'est (dit seulement) 8 jours.

47. Enseignante : Ils ne t'ont pas expliqué comment ils l'ont trouvé. Bon.

48. Louise : Mais c'est la bonne réponse.

49. Enseignante : C'est la bonne réponse… puis qu'est-ce que tu trouves qu'ils auraient dû mettre? Qu'est-ce que tu trouves qu'ils auraient dû ajouter? Qu'est-ce qui manque?

50. Louise : Ils auraient dû ajouter le nombre d'arachides.

Dans cette partie de la leçon, les élèves ont été mis, de façon explicite, dans une situation nouvelle pour eux : ici, ils deviennent explicitement interprètes du travail des autres. Les premières lignes montrent la difficulté de l'expérience : les élèves trouvent que ce que leurs pairs ont écrit « ne fait pas de sens ».

La prise de conscience qu'une explication s'adresse à une personne et que cette personne est censée pouvoir la comprendre donne une nouvelle perspective à la communication.

Avec l'aide de l'enseignante, le groupe 1 arrive à distinguer entre *réponse* et *explication*. Les élèves commencent à distinguer entre ce qu'est un argument clair et une bonne réponse. Mais pour eux, c'est encore difficile de déterminer ce qui peut manquer à un argument pour que celui-ci devienne clair. À la fin, Louise suggère que l'autre groupe aurait dû mentionner le nombre d'arachides.

L'extrait ci-dessous permet de mieux voir le cheminement des élèves dans la compréhension d'un argument clair.

51. Enseignante : Bon, OK. On va passer à la question trois, maintenant. La question trois était : « En sachant que l'écureuil ne mangeait pas d'arachides provenant de ses provisions, je me demande si un jour, dans ses provisions, il a pu avoir exactement 27 arachides? Qu'en pensez-vous? Vous avez écrit… vous avez écrit quoi?

52. Anna : (*En répondant à la question de l'enseignante, elle lit :*) « Non, il ne peut pas parce qu'il ne peut pas en manger. » (*voir Figure 4*)

53. Enseignante : Et eux (*en se référant au groupe 3*), qu'est-ce qu'ils ont écrit?

54. Anna : Eux, ils ont écrit : « Non, parce qu'on compte par deux. » C'est clair, je pense.

55. Enseignante : (*en se référant au groupe 2*) Et eux autres?

56. Louise : (*Elle lit la réponse.*) « Non, parce que nous comptons par deux comme 26… 28. »

57. Enseignante : Quel groupe aurait eu une moins bonne explication?

58. Louise : Là (*elle indique la réponse de son groupe*) (…) On a la moins bonne (explication).

59. Enseignante : Oui, mais ce n'est pas important ça (…) je ne dis pas que (votre réponse) n'est pas bonne… je dis que c'est moins clair, peut-être. Vous dites tous… ça (*c'est-à-dire que c'est impossible d'avoir 27 arachides*). Eux autres, ils disent pourquoi, (ils disent) parce qu'on compte par deux.

60. Louise : Eux autres aussi (*en se référant au groupe 2*) (…) Nous, (non) il ne peut pas parce qu'il ne peut pas en manger.

61. Enseignante : Ce n'est pas grave… ce n'est pas grave… alors, écrivez.

62. Louise : C'est clair.

63. Enseignante : Est-ce que c'est la bonne réponse?

64. Anna : Oui.

65. Enseignante : La question, c'est : « Est-ce qu'il peut avoir 27 arachides? »

66. Louise : Non.

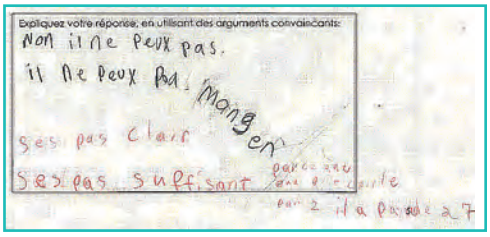
67. Enseignante : Pourquoi?

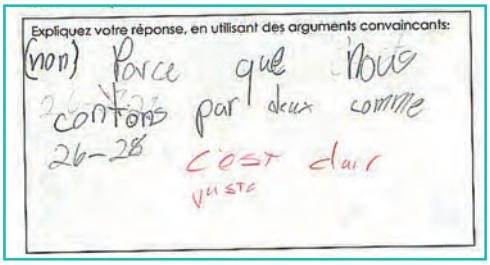
68. Louise : Parce que, il compte par deux.

69. Enseignante : Et 27… ?

70. Louise : C'est un nombre… impair.

Les élèves comprennent mieux maintenant ce que veut dire un argument clair. L'échange des feuilles avec les autres groupes a porté fruits. Elles ont été capables de voir la faiblesse de leur argumentation en étudiant de façon critique ce que les autres groupes ont écrit. Ce n'est pas que l'argument qui relève de l'impossibilité de manger des arachides des provisions soit faux : c'est qu'il y a une hiérarchie dans les arguments qui fait en sorte que certains apparaissent comme plus pertinents ou convaincants que d'autres. À la fin, Louise est même capable de donner un argument selon la parité de nombres.





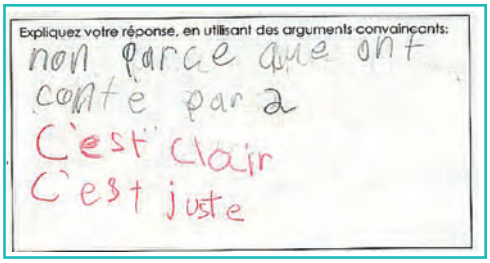


Figure 4. Au haut, l'enseignante et les élèves en train de comparer les explications. Au bas, les explications fournies successivement par les groupes 1, 2 et 3. En rouge, l'évaluation critique faite par les élèves. (La copie du groupe 1 porte, en rouge, l'évaluation faite par le groupe 2.)

5. Survol et synthèse générale de l'exemple

La leçon illustre la méthodologie suivie pour mettre sur pied et encourager la communication en salle de classe. La méthodologie consiste en une série d'étapes : (1) mise en situation par l'enseignante d'une activité dont les questions permettront aux élèves de réfléchir, de résoudre certains problèmes et d'expliquer les solutions; (2) travail en petits groupes; (3) échange des solutions et évaluation critique afin de présenter aux élèves la différence entre un argument clair, un argument juste et un argument suffisant.

Lors de la leçon, il y a eu une rencontre entre les trois groupes mentionnés dans la dernière partie. La rencontre a été très fructueuse et a permis aux élèves de mieux comprendre le rôle d'interprète qu'exige toute activité discursive. Elle a permis également d'approfondir l'idée d'argument suffisant. Par exemple, en discutant avec les élèves, l'enseignante a fait ressortir que l'idée de compter par bonds de deux (idée mentionnée par les groupes 2 et 3; voir Figure 4) n'est pas suffisante, car on peut aussi bien, en comptant par deux, générer la suite 3, 5, 7, 9, etc. Armand a alors remarqué qu'il fallait ajouter à l'argument le fait qu'on commence avec 8 arachides (voir Figure 5).

Figure 5. La rencontre entre les groupes 1, 2 et 3. Sur la photo, on voit Armand en train de dire « le jour zéro, il avait trouvé huit et il (…) il en ramasse deux par jour ».

Les extraits des dialogues suggèrent que des élèves du cycle primaire peuvent continuer à développer les processus entamés au cycle préparatoire et à s'améliorer dans les dimensions sociocognitives de savoir écouter l'autre, de s'engager au dialogue et de donner suite aux propos des autres. Les élèves du cycle primaire peuvent commencer à distinguer différents types d'argumentations. Ils peuvent notamment commencer à distinguer entre un argument juste, un argument clair et un argument suffisant.

Une recommandation consiste à s'assurer qu'on insère dans les leçons des « situations impossibles » (p. ex., d'avoir 27 arachides dans le contexte du problème). Du point de vue de l'apprentissage, ces situations ont l'avantage d'amener les élèves à utiliser des termes linguistiques qui renvoient à des relations causales (car, parce que, donc, alors, etc.). L'enseignante ou l'enseignant pourrait s'assurer de souligner ces termes lorsque les élèves les mentionnent.

Comme nous avons pu le constater au cours de ce chapitre, il faudra s'attendre à ce qu'il y ait, chez les élèves, des usages impropres de termes de relation causale. Parfois, il arrive que les arguments et l'utilisation des relations causales sortent du contexte. L'enseignante ou l'enseignant pourrait alors discuter de ces utilisations impropres avec les élèves.

6. Quelques pistes d'intervention

Engagement au dialogue

L'enseignante ou l'enseignant peut :

– demander à un élève de reformuler le propos tenu par un autre élève;

– demander à un élève de répéter le propos tenu par un autre élève;

– demander à un élève de dire s'il est ou non d'accord avec l'idée proposée par un autre élève et d'en expliquer les raisons.

La différence entre arguments justes, clairs et suffisants

Comme nous l'avons vu au cours de cette leçon, la différence entre arguments justes, clairs et suffisants n'est pas évidente pour les élèves. Pour la rendre accessible aux élèves, l'enseignante ou l'enseignant peut utiliser des exemples d'arguments donnés par les élèves au cours de la leçon (bien sûr, on peut aussi en ajouter d'autres inventés par l'enseignante ou l'enseignant; voir ci-dessous).

Voici, dans le contexte de la question 3, un exemple d'argument qui n'est pas clair : « ça va par des bonds de 2 ». Le problème ici, c'est l'ambiguïté de l'expression « ça ». Bien que, dans le contexte de la question, on puisse deviner l'objet auquel fait référence l'expression « ça », l'idée de clarté est de diminuer le plus possible l'ambiguïté de l'argumentation. Il faut toutefois avoir présent à l'esprit qu'il est pratiquement impossible de tout dire et que, en pratique, ce n'est pas nécessaire. La catégorie de clarté est donc relative. Dans l'exemple, nous considérons que le terme « ça » aurait dû être précisé davantage. C'est pour cette raison que nous disons que l'argument n'est pas clair. Si on dit, par contre, « la suite 8, 10, 12, etc. va par des bonds de 2 » (ou « le nombre d'arachides accumulées est 8, 10, 12, etc. »), l'argument devient clair. Bien sûr, un argument peut être clair sans être suffisant. L'argument « la suite 8, 10, 12, etc. va par des bonds de 2 » ne permet pas à lui seul d'établir la preuve qu'on cherche. Donc, bien qu'il soit clair, il n'est pas suffisant. Un argument suffisant est un argument qui est clair et qui montre, de façon convaincante, la justesse du fait en question.

L'apprentissage des catégories argumentatives « claire », « juste » et « suffisant » se fait peu à peu. Cela demande de la part de l'élève une compréhension des exigences posées par l'enseignante ou l'enseignant.

Considérations des arguments et des propos des autres et organisation de la présentation

L'enseignante ou l'enseignant peut :

– donner, au cours de la leçon, des arguments faux, insuffisants, non clairs et demander aux élèves de les identifier et de les corriger afin de les rendre tour à tour justes, suffisants et clairs;

– donner des phrases à compléter en utilisant les termes qui renvoient à des relations causales (p. ex., « parce que… », « car… », etc.).

Analyser avec les élèves une liste d'arguments mathématiques et non mathématiques se rapportant à un problème donné afin d'amener les élèves à distinguer les arguments qu'on utilise en mathématiques.

7. Pour en savoir plus…

Bednarz, N. L. Poirier et L. Bacon. (1992). « Apprendre à penser en mathématiques : un exemple d'intervention pédagogique auprès de jeunes enfants », *Vie pédagogique*, n° 79, mai-juin 1992, p. 35-36.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing Gesture. How Our Hands Help Us Think*. Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.

Kita, S. (2003). *Pointing. Where Language, Culture, and Cognition Meet*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Reid, D. (2002). "Describing young children's deductive reasoning". In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), A. Cockburn and E. Nardi (dirs.), University of East Anglia, UK, vol. 4, p. 105-112.

Spungin, R. (1996). "First- and Second-grade students communicate mathematics". *Teaching Children Mathematics*, 3 (4), 174-179.

Chapitre 6

La communication en mathématiques au cycle moyen

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communiction au cycle moyen
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle moyen
4. Un exemple de salle de classe : les fractions équivalentes
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication
7. Pour en savoir plus...

1. Introduction

Supposons que nous entrons dans une classe dont nous ignorons l'année d'études et que, en ouvrant la porte, nous entendons la discussion suivante entre trois élèves :

1. Élève 1 : Ça, c'est Isabelle. Elle en a 4 sur 12… donc ça, c'est Isabelle. Il y en a 4 sur 12... Tu peux les mettre tous les trois… ça fait un tiers.

2. Élève 2 : (*D'un ton peu convaincu, il dit :*) Ouié…

3. Élève 3 : Non, ça, c'est un entier!

4. Élève 1 : Non, il y en a trois.

5. Élève 3 : Il y a trois tiers!

6. Élève 1 : C'est trois tiers…?

7. Élève 3 : Ça, c'est un tiers! (*Elle prend un objet de la table et, en le gardant dans sa main, elle le montre à l'élève 1.*) (*voir Figure 1*)

Figure 1. L'élève 3 (à gauche) montre un objet à l'élève 1 (à droite), qui prend deux autres objets verts et les garde dans sa main gauche (lignes 7 et 8).

8. Élève 1 : Avec tout ça… (cela) fait un entier.

9. Élève 3 : Exactement! Puis, ça, c'est un tiers!

10. Élève 1 : Là, ça, c'est Isabelle.

11. Élève 2 : Il en reste huit.

12. Élève 3 : (*En s'opposant aux propos précédents, elle dit avec force :*) Isabelle?… c'est pas comme ça!

Après avoir ouvert la porte et écouté un petit moment ce groupe, le moins que l'on puisse dire, c'est que les élèves ne se mettent pas d'accord. Mais ce qui frappe le plus, c'est que, si nous comparons cette discussion à celles analysées aux chapitres précédents, on constate que celle-ci a une allure plus sophistiquée. Nous voyons les filles tenir, avec grande conviction, des propos mathématiques. Nous les voyons aussi s'opposer de façon ferme aux propos de l'autre. À des oppositions ouvertes, exprimées par une assertion négative (lignes 3, 4 et 12), s'ajoutent des oppositions plus subtiles, formulées dans une argumentation qui fait appel, au besoin, à de petits objets colorés qui sont sur la table et qui, aux yeux d'un observateur externe, semblent chargés d'un pouvoir de preuve extraordinaire.

Il y a un autre élément important à noter. On aurait pu rester là, devant les élèves, à écouter toute la discussion et, fort probablement, on n'aurait pas pu déterminer à coup sûr le problème dont ils discutaient. Le contenu conceptuel de l'argumentation est plus complexe que celui auquel nous avons eu affaire aux chapitres précédents.

Or, quelle est la relation entre la complexité conceptuelle et la finesse argumentative que ces élèves semblent avoir atteintes ici et que nous n'avons pas retrouvées chez les élèves plus jeunes aux chapitres précédents? Est-ce parce qu'ils ont appris de nouveaux concepts qu'ils discutent mieux? Ou bien devrait-on affirmer le contraire, à savoir que c'est le développement des compétences discursives qui entraîne un plus grand développement conceptuel?

Au chapitre 1, nous avons proposé le « principe d'interdépendance cognitive » entre concept et raisonnement. Un niveau conceptuel plus élevé, avons-nous dit, exige la mise en œuvre de modes de raisonnements et d'argumentations plus raffinés. En contrepartie, des arguments plus détaillés dévoilent des caractéristiques plus profondes ou nouvelles du concept en question.

Il fut un temps, pas très lointain d'ailleurs, où l'on crut que l'enseignement de la logique en tant que telle allait conduire à un apprentissage plus substantiel des concepts enseignés à l'école. Toutes ces tentatives se sont soldées par un grand échec. Il a fallu quelque temps encore pour réaliser ce qui pourtant avait déjà été objet de litiges au XVIIIe siècle : un raisonnement ne peut pas être conduit sans prendre appui sur des objets précis. Enlever au raisonnement ses objets et le réduire à sa seule « forme » peut être un exercice intellectuel intéressant, mais il s'avère être de peu d'utilité du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage.

Il fut un temps aussi où l'on prit le chemin inverse : sous la pression intense de l'empirisme, on a mis l'accent sur les objets eux-mêmes, en espérant qu'en les touchant et en les rendant concrets, leur aspect conceptuel allait sauter aux yeux des élèves. L'échec n'a pas été moindre que dans le cas précédent.

Plusieurs théories du développement fournissent encore une autre réponse à la question que nous avons soulevée : ce n'est ni l'activité discursive qui entraîne un plus grand niveau de développement cognitif, ni le développement cognitif qui entraîne une activité discursive plus fine, car tous les deux dépendent d'un troisième facteur : la maturation. Ces théories considèrent la maturation comme une sorte de programme qui serait inscrit au plus profond de notre code génétique. D'après ces théories, le milieu externe ne peut avoir aucune influence sur le développement. De plus, on ne peut apprendre que ce que permet le niveau de la maturation à ce stade. Selon ces théories, l'apprentissage est complètement assujetti à un développement qui suit le chemin inexorable que son destin biologique lui a fixé.

Toutefois, en étudiant le développement du sens du toucher chez de jeunes enfants, le psychologue allemand Kurt Koffka a pu montrer que, sous certaines conditions, il y a une amélioration qui ne peut pas être attribuée à la seule maturation sensorimotrice. Au moment de la répétition d'un mouvement, par exemple, un véritable apprentissage peut avoir lieu, et cet apprentissage peut modifier le développement. Ainsi, Koffka a pu mettre en évidence que, s'il est vrai que le développement dépend de la maturation, cela ne signifie pas pour autant qu'il en dépend de façon exclusive. D'une part, le système nerveux de l'enfant doit avoir atteint un certain niveau de maturation avant que l'enfant puisse réagir à certaines situations de façon appropriée. Mais, d'autre part, certains apprentissages viennent se greffer sur la maturation et permettent d'atteindre des réussites plus amples. En faisant référence au développement du sens du toucher et de la préhension chez l'enfant, Koffka dit : « L'histoire de ce processus révèle une interaction très serrée entre maturation et apprentissage… La maturation ne doit pas être prise comme un processus qui se déploie indépendamment de l'apprentissage[31]. » La maturation fait progresser l'apprentissage et, en retour, l'apprentissage fait progresser la maturation.

Comme Vygotski l'a remarqué, Koffka a eu le mérite d'être allé plus loin que les conceptions biologiques du développement et que les conceptions associationnistes (qui, elles, soutenaient que l'apprentissage et le développement étaient exactement la même chose). Mais force est d'avouer qu'il n'a pas spécifié la nature de la relation entre apprentissage et développement. Le concept de *zone proximale de*

31 K. Koffka. (1931). *The Growth of the Mind. An Introduction to Child-Psychology*. New York: Harcourt, Brace & Co. p. 279-80.

développement de Vygotski, que nous avons mentionné au chapitre 3, fournit une explication. Les situations et les problèmes se situant dans la zone proximale de développement s'appuient sur le développement présent des fonctions psychologiques de l'enfant et offrent à ces fonctions la possibilité d'atteindre un niveau qui n'était, jusqu'alors, qu'à l'état potentiel. C'est pourquoi « le seul apprentissage valable pendant l'enfance est celui qui anticipe sur le développement et le fait progresser. » (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 273). C'est pour cette même raison qu'« enseigner à l'enfant ce qu'il n'est pas capable d'apprendre est aussi stérile que de lui enseigner ce qu'il sait déjà faire tout seul. » (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 277).

L'activité discursive de salle de classe, telle que nous la concevons ici, permet d'accomplir les transformations qui mènent à de nouveaux développements à l'intérieur de la zone proximale de développement de l'élève. Dans l'épisode mentionné ci-dessus, où nous voyons trois élèves discuter d'un problème mathématique, l'activité discursive mobilise, à la fois et de façon dialectique, des raisonnements plus fins et des concepts plus abstraits. Bien sûr, il ne suffit pas de poser un problème dans la zone proximale de développement pour que le principe de la relation d'interdépendance entre concept et raisonnement se mette en œuvre. On ne lance pas un problème dans la zone proximale de développement comme on lance une pierre dans l'eau calme d'un lac. Justement, la caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être sociale. Cela signifie que, loin d'être innées, les formes de raisonnement mathématiques s'acquièrent dans l'interaction et dans la discussion avec les autres.

Nous venons de dire que la caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être sociale. En fait, c'est faux. La caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être *culturelle*. Les formes de raisonnement que l'on vise en salle de classe (raisonnements déductifs, probabilistes, algébriques, etc.) dépassent, en effet, la dimension de l'interaction sociale de la salle de classe. Ces formes existent bien avant que l'activité discursive de salle de classe se mette en œuvre. Ce sont des formes de raisonnement historiquement et culturellement constituées qui servent de repère à la direction que prendra le développement de l'enfant grâce aux activités mathématiques dans la salle de classe. Le terrain de l'interaction discursive est sans doute le terrain le plus fertile pour faire comprendre l'intégration du principe de la relation d'interdépendance entre concept et raisonnement. Mais, pour que l'interaction soit efficace, il faut s'assurer que l'interaction et la communication mènent aux conceptualisations et aux raisonnements mathématiques visés. Dans ce contexte, le choix des objectifs qu'on peut se fixer en matière de communication acquiert tout son sens. Or, quels peuvent être ces objectifs pour le cycle moyen?

Pour répondre à cette question, on gardera présent à l'esprit que les efforts pédagogiques, visant à atteindre un niveau souhaitable de compétence en communication, devront assurer une continuité et un approfondissement des développements cognitifs et sociaux déjà entamés au cycle précédent. L'élève du cycle moyen devrait être en mesure d'utiliser une argumentation plus riche qui, sans être aussi sophistiquée que l'argumentation aux cycles intermédiaire et supérieur, ferait appel à plusieurs systèmes de signes (phrases, dessins, tableaux, expressions arithmétiques, etc.). Si, au cycle précédent, des exemples concrets ou des phrases courtes restaient la base de l'argumentation mathématique typique, on cherche ici à amener l'élève à produire des textes argumentatifs plus complexes comportant un plus haut niveau de clarté, de logique et d'efficacité. Dans la section qui suit, nous proposons quelques objectifs que l'on pourra prendre en considération dans l'élaboration d'activités mathématiques de salle de classe.

2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle moyen

En continuité avec les objectifs du cycle primaire, à la fin du cycle moyen, l'élève doit pouvoir :

1. utiliser les conventions mathématiques correspondantes au cycle moyen;
2. écouter les propos mathématiques de ses pairs;
3. interpréter les arguments mathématiques de ses pairs;
4. évaluer de façon critique les arguments des autres;
5. exprimer des arguments mathématiques appropriés à la situation mathématique en question;
6. présenter des justifications mathématiques des arguments qu'il ou elle avance;
7. améliorer sa connaissance de ce qu'est un argument exact, clair et suffisant;
8. organiser avec logique et efficacité la présentation d'un résultat d'une activité mathématique.

Nous avons mentionné au chapitre 2 que l'objectif 1 relève du critère « Syntaxe et symbole »; les objectifs 2, 3 et 4 relèvent du critère « Considération des arguments et des propos des autres »; les objectifs 5, 6 et 7 relèvent du critère « Engagement au dialogue »; l'objectif 8 appartient au critère « Organisation de la présentation ». Rappelons que, selon le contexte de l'activité, les objectifs 1, 5 et 6 peuvent aussi être inclus dans le critère « Organisation de la présentation ».

Les objectifs énoncés vont se retrouver dans les cycles suivants, où ils seront raffinés et approfondis en fonction des opérations mathématiques apprises par les élèves selon les contenus d'apprentissage du cycle en question, d'une part, et du développement cognitif de l'élève, d'autre part (voir chapitres 7 et 8).

Pour arriver aux objectifs mentionnés, les enseignantes et les enseignants auront avantage à utiliser des activités de salle de classe où la communication apparaît tant dans sa dimension écrite qu'orale. La section ci-dessous donne quelques pistes concrètes d'actions pédagogiques pour soutenir le développement de la compétence Communication chez l'élève.

3. Mise en place et gestion de la communication au cycle moyen

Afin qu'une leçon qui mise sur la communication soit bien réussie, il faut qu'elle soit planifiée en tenant compte de certaines conditions.

Le choix de l'activité mathématique

Insistons encore une fois sur le fait que l'activité mathématique doit être suffisamment complexe pour permettre des interactions intéressantes. Au moment de la planification d'une activité, on ne doit pas oublier que l'activité n'est pas consacrée à la communication seulement. Il est évident que la communication ne peut pas être la seule compétence visée. D'après le principe de l'interdépendance cognitive entre raisonnement et concept, il est clair que la communication facilite l'acquisition des concepts, et qu'elle est présente lorsque les activités exigent de l'élève qu'il collabore avec ses pairs à la résolution de problèmes. Une activité riche visera, par conséquent, plusieurs compétences à la fois.

La formation judicieuse de groupes

Le cycle moyen apparaît comme un cycle clé dans la consolidation des habiletés sociales de l'élève qui sous-tendent le bon fonctionnement de la communication. C'est pourquoi, si l'on veut une communication réussie, il est absolument nécessaire de créer à l'intérieur de la salle de classe du cycle moyen une culture d'ouverture et d'échange.

Pour mener cette entreprise à terme, on doit avoir présent à l'esprit qu'à la base du travail en groupe se trouve la volonté d'apprendre ensemble et de prendre ses responsabilités.

Il n'y a pas de recette magique pour former les groupes. Des élèves relativement forts peuvent aider les autres élèves à raffiner leur compréhension des mathématiques. En contrepartie, les élèves plus forts, en donnant des explications aux membres de leurs équipes, ont l'occasion de rendre explicite leur propre compréhension, ce qui amène souvent à un niveau plus profond de prise de conscience. Le défi à relever, c'est de s'assurer que l'élève fort ne monopolise pas la parole, qu'elle ou il est capable de comprendre les autres, et d'aller chercher leurs avis. L'enseignante ou l'enseignant devra alors s'assurer que la communication au sein des groupes est toujours ouverte, et que les élèves sont à l'écoute des autres et prêts à s'engager dans le dialogue.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant

Bien que les élèves soient relativement indépendants à cet âge, il ne faut pas croire pour autant qu'ils seront capables de résoudre les problèmes de façon autonome. L'enseignante ou l'enseignant doit être vigilante ou vigilant dans ses interventions et s'assurer que les élèves discutent librement de mathématiques en l'absence de supervision. Il faut donc qu'il y ait une interaction ponctuelle entre l'enseignante ou l'enseignant et chacun des groupes. Dans ses propos avec le groupe, l'enseignante ou l'enseignant peut cibler des questions qui permettront de mesurer la compréhension des élèves et, à partir de là, proposer des défis et suggérer des pistes convenables de recherche.

4. Un exemple de salle de classe : les fractions équivalentes

Afin de donner une idée concrète de la façon dont la communication peut être encouragée au cycle moyen, nous allons présenter, dans cette section, des éléments concernant la mise en place et la gestion de la communication dans une classe de cinquième année.

Puisque la compétence Communication ne peut pas se limiter à l'écrit, mais doit aussi inclure la dimension orale, nous avons élaboré une leçon qui permettait aux élèves de travailler en petits groupes sur une activité mathématique divisée en une série de problèmes. La leçon portait sur un thème très classique du domaine Numération et sens du nombre : celui des fractions équivalentes. Nous avons choisi ce thème pour montrer que la communication joue un rôle important même dans les thèmes les plus traditionnels du programme de mathématiques.

Dans le cas de cette leçon, le concept des fractions avait déjà été enseigné, mais celui des fractions équivalentes était nouveau.

L'activité fait appel à la manipulation d'objets concrets : ce sont des parties d'une boîte à œufs (voir Figure 2). La correspondance entre des parties d'une boîte à œufs et la fraction représentée est montrée

sur le tableau 1 ci-dessous. Ces objets concrets médiatisent l'activité (au sens des concepts vus au chapitre 1) en fournissant une forme de représentation des objets mathématiques visés (p. ex., les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$). Ils offrent une voie d'accès au concept de fractions équivalentes. Naturellement, ce matériel ne constitue pas le seul matériel possible pour enseigner les fractions. Il y en a d'autres et aucun – le nôtre y compris – n'est « parfait ». Il n'y a pas de matériel concret qui, dans sa manipulation, mènerait automatiquement au concept concerné. La recherche du matériel de manipulation parfait est aussi vaine que celle de l'élixir de la vie. Nous avons déjà mentionné l'échec des perspectives empiristes en éducation. Ce qui est important de retenir, c'est que le matériel didactique offre aux élèves l'occasion de donner un sens au concept de fractions équivalentes. La production du sens se fait ici à l'intérieur d'une activité perceptuelle et d'une activité symbolique. L'activité perceptuelle demande une interprétation continuelle du concept de fraction; l'activité symbolique demande de voir chaque petite pièce de la boîte à œufs non pas en tant que telle, mais comme représentation d'une fraction abstraite. L'apprentissage du concept de fraction équivalente se fait dans la jonction de ces deux activités : la symbolique et la perceptuelle, ce qui, bien sûr, ne se fait pas sans difficulté.

Figure 2. Une partie du matériel concret utilisé pour modéliser les fractions.

Partie de la boîte à œufs	Fraction représentée
1 alvéole	$\frac{1}{12}$
2 alvéoles	$\frac{1}{6}$
3 alvéoles	$\frac{1}{4}$
4 alvéoles	$\frac{1}{3}$
6 alvéoles	$\frac{1}{2}$
12 alvéoles	1 entier ou le tout

Tableau 1. Correspondance entre les parties de la boîte à œufs et les fractions.

La figure 2 représente une partie du matériel concret qu'on avait mis à la disposition de chacun des groupes d'élèves. Il est à noter que chacune des fractions était représentée par une couleur distincte.

Dans l'introduction à la leçon, l'enseignant a résolu un problème de fractions équivalentes devant la classe, en utilisant un matériel didactique différent des boîtes à œufs (l'enseignant a utilisé les « Pattern

Blocks »). Ensuite, en groupes de trois, les élèves ont répondu à une série de questions. Les élèves devaient produire une explication écrite, claire et précise afin d'indiquer si la situation donnée dans le problème correspondait ou non à des fractions équivalentes. À chacune des étapes, on encourageait les élèves à échanger et à justifier leurs interventions au sein de leur groupe (objectifs 1, 5, 6, 7, 8). On trouvera la leçon complète dans l'annexe, après le chapitre 10.

Pour se conformer au plan de la leçon, une fois que la justification écrite de chacune des questions a été accomplie, on a demandé à chaque groupe de donner sa copie écrite à un autre groupe. Chaque groupe devait alors juger de façon critique et objective les justifications de l'autre groupe et dire si celles-ci étaient claires, précises et facilement compréhensibles. Par la suite, les groupes devaient se rencontrer face à face pour commenter les arguments des autres. À tour de rôle, ils devaient expliquer, de façon respectueuse, ce qu'ils considéraient comme étant les points forts et les points faibles des arguments mathématiques des autres. Chaque groupe pouvait, au besoin, en expliquant la solution aux problèmes donnés, rédiger un texte conjoint fournissant de meilleurs arguments mathématiques que le texte original (objectifs 2, 3, 4, 6, 7 et 8).

Dans ce qui suit, nous illustrons, à l'aide d'une série d'exemples concrets tirés des transcriptions d'élèves, la manière dont : (1) la conception de l'activité mathématique et (2) la gestion de la classe en petits groupes et sa dynamique sociale d'échange d'idées ont permis aux élèves de participer au développement de la compétence Communication.

Les exemples montrent comment la conception de la leçon permet, à des moments différents et avec des intensités variables, d'atteindre les objectifs visés de la compétence Communication énumérés à la section 2 ci-dessus.

Sur un autre plan, les exemples illustrent certaines difficultés conceptuelles liées à l'acquisition du concept de fraction équivalente chez l'élève.

Engagement au dialogue et considération des arguments des autres

Le court extrait ci-dessous montre la façon dont un élève, Kyle, mobilise des ressources argumentatives pour dissiper une confusion au sujet des fractions. On y voit tant son engagement au dialogue que sa façon de tenir des propos mathématiques. L'extrait provient du début de l'activité, où il s'agit de déterminer si la fraction $\frac{1}{3}$ correspond à la partie de la boîte à œufs qui a trois alvéoles (comme suggère Sylvie) ou à celle qui a quatre alvéoles.

1. Kyle : Regarde! Ça, c'est un quart (*il montre la section rouge; voir Figure 3*), puis ça, c'est un tiers. (*Il montre la section verte; voir Figure 4.*)

2. Sylvie : Quand même? (*Elle n'est pas convaincue.*)

Figure 3. Kyle en train de montrer la partie qui correspond à un quart de la boîte.

3. Kyle : C'est le contraire. (*Il se réfère ici à l'inversion entre la valeur du dénominateur et le nombre d'alvéoles comprises dans la fraction. Ainsi :* $\frac{1}{4}$ *= 3 alvéoles;* $\frac{1}{3}$ *= 4 alvéoles. Sylvie est d'avis que* $\frac{1}{3}$ *= 3 alvéoles et* $\frac{1}{4}$ *= 4 alvéoles.*) Tu comprends?

Figure 4. Kyle en train de montrer la partie qui correspond à un tiers de la fraction.

4. Sylvie : 3 sur 12…

5. Kyle : (*Il voit que Sylvie n'est pas convaincue, alors il continue.*) Tu peux en mettre 3 comme ça pour faire 12 (*il prend trois sections vertes contenant 4 alvéoles chacune*), puis il faut que tu en mettes 4 sur 12 (*il montre les sections rouges contenant 3 alvéoles chacune*), donc, c'est un quart. Ça, c'est un tiers (*il montre la section verte*) […]

6. Enseignant : C'est quoi un quart?

7. Kyle : Un quart (*il montre une section rouge : 3 alvéoles*).

8. Enseignant : Ça, c'est un quart (*il montre du doigt la section que Kyle a dans les mains*), c'est quoi un tiers?

9. Sylvie : Un tiers, c'est toute l'affaire. (*elle montre du doigt la douzaine vide*)

10. Kyle : (*Il montre la section verte : 4 alvéoles.*)

11. Enseignant : Ça, c'est un tiers. (*il montre de nouveau la section verte que Kyle a dans la main*) Très bien, c'est bien…

On voit donc, dans cet extrait, Kyle et Sylvie discuter de leur interprétation du quart et du tiers lorsque l'entier de base contient 12 alvéoles. À la ligne 5, Kyle présente une preuve mathématique de son idée. Kyle soutient que le tiers correspond à la partie qui a quatre alvéoles. La preuve se fait à l'aide d'objets concrets ainsi qu'au moyen de gestes et de mots tels que *ça* (le mot *ça* apparaît au moins cinq fois dans cet extrait aux fins de désignation d'un référant). Au cours de la preuve, l'activité perceptive devient très importante. Ce n'est pas le nombre d'alvéoles qu'il faut considérer, mais le nombre de fois que la partie va dans le tout.

À la fin du passage cité, le questionnement de l'enseignant montre que Kyle a compris, de façon adéquate, la fraction représentée par les petits objets en carton; Sylvie aura encore à bien distinguer la relation partie-tout qui sous-tend le concept de fraction.

Notons, au passage, que ce court extrait offre un exemple clair du fonctionnement du principe d'interdépendance cognitive entre concept et raisonnement. Le raisonnement sur lequel repose la preuve de Kyle et le concept que véhicule ce raisonnement sont profondément liés.

L'extrait ci-après contient le dialogue rapporté dans l'introduction à ce chapitre. Il provient du groupe formé de Julie, Natasha et Patrick. Le problème dont les élèves discutent est le suivant :

Le dimanche de la fête des Mères, Isabelle et Danielle ont préparé des crêpes aux bananes pour leur maman et les autres membres de leur famille. Le samedi d'avant, chacune d'elles a acheté un gros sac de farine. Pour faire ses crêpes, Isabelle a utilisé $\frac{4}{12}$ de son sac de farine et Danielle a utilisé $\frac{1}{3}$ de son sac de farine. En sachant que les sacs de farine sont identiques, est-ce que les fractions de farine utilisées par Danielle et Isabelle sont équivalentes?

La discussion gravite autour de deux points :

– *L'ambiguïté du référent*. Il y a, dès le départ, un malentendu entre Julie et Natasha. La confusion résulte de l'utilisation que fait Julie de l'expression « ça ». Notons que l'expression « ça » est très commune. En effet, elle apparaît très souvent dans toute activité discursive. Son utilisation massive découle du fait que, à l'opposé des noms propres, l'expression « ça » convient à toute une variété d'objets du discours (on pourrait dire qu'elle convient à tout objet placé dans le champ de vision des personnes engagées dans une communication en face à face). Mais, puisqu'elle peut désigner plusieurs objets, elle peut porter à confusion : c'est ce qu'on appelle l'ambiguïté du référant. On verra ce phénomène dans l'extrait ci-dessous. Julie désigne un tiers par le terme « ça ». Natasha pense qu'en utilisant le terme *ça*, Julie fait référence à l'entier.

– *La diversité de représentations d'un objet mathématique*. Sur le plan conceptuel, on verra également que Natasha s'oppose à l'idée de représenter la fraction d'Isabelle par des tiers car, d'après elle, et suivant ce que dit textuellement l'énoncé du problème, Isabelle utilise des douzièmes. Un des éléments centraux de l'apprentissage des mathématiques est justement de pouvoir représenter une même situation par des symboles différents. C'est d'ailleurs là que réside une difficulté clé dans l'acquisition du concept de fractions équivalentes. La communication entre les élèves permettra néanmoins de surmonter peu à peu cette difficulté. Voici l'extrait :

12. Julie : Ça, c'est Isabelle. (*elle montre du doigt une des sections vertes des boîtes à œufs qui contient quatre alvéoles*) Elle en a 4 sur 12… donc ça, c'est Isabelle. (*elle montre encore une section verte*) Il y en a 4 sur 12... (*Pour montrer que la section verte est en même temps égale à un tiers du tout, Julie place 3 sections vertes ensemble pour former le tout; pendant qu'elle fait cela, elle dit :*) Tu peux les mettre tous les trois (ensemble)… ça fait un tiers.

13. Patrick : (*D'un ton peu convaincu, il dit :*) Ouié…

14. Natasha : (*Elle interprète le mot « ça » de la ligne 12 non pas comme référant au tiers, mais à la forme entière, c'est-à-dire au tout; alors, elle corrige Julie. Elle montre les trois sections vertes et dit :*) Non, ça, c'est un entier!

15. Julie : (*Sans comprendre les propos de Natasha, elle dit :*) Non, il y en a trois. (*Elle compte en montrant chacun des trois tiers.*)

16. Natasha : Il y a trois tiers!

17. Julie : C'est trois tiers…? (*Elle ne comprend pas les propos de Natasha.*)

18. NATASHA : Ça, c'est un tiers! (*Elle enlève deux tiers du tout – c'est-à-dire de l'entier – et les cache à côté d'elle, en en laissant un sur le tout; voir Figure 5.*)

Figure 5. Natasha enlève deux tiers avec sa main gauche et laisse un tiers sur la table (ligne 18).

19. JULIE : Avec tout ça (*en montrant les deux tiers que Natasha a cachés à côté d'elle*), (cela) fait un entier.

20. NATASHA : Exactement! Puis ça (*elle prononce le mot « ça » avec force*), c'est un tiers. (*Elle montre la section verte qui reste sur le tout et qu'on voit sur la figure 5, vers la gauche de Patrick.*)

21. JULIE : (*Maintenant que le malentendu est levé, elle revient sur le problème.*) Là, ça, c'est Isabelle. (*Elle montre de nouveau la section verte qui reste sur la table et qui contient 4 alvéoles.*)

22. PATRICK : Il en reste huit. (*Il compte le nombre d'alvéoles libres dans la douzaine, soit 12 - 4 = 8.*)

23. NATASHA : Isabelle?… c'est pas comme ça! (*Elle n'est pas d'accord, car elle voit un tiers, tandis que le problème dit qu'Isabelle a quatre douzièmes.*)

24. JULIE : Isabelle, c'est quatre sur 12 donc… un (*elle place une section verte - qui contient 4 alvéoles - dans l'entier*) il y en a quatre. (*Elle se réfère au nombre d'alvéoles vertes; voir Figure 6.*)

Figure 6. Julie en train d'argumenter que la fraction d'Isabelle peut être représentée par un tiers (ligne 24).

25. NATASHA : Ah oui!… maintenant je suis convaincue. (*À ce moment-ci, Natasha commence à comprendre, mais, comme le montre la suite, la compréhension se fait peu à peu.*)

26. PATRICK : Quoi? (*Il semble curieux de savoir ce que Natasha a à dire.*)

27. NATASHA : J'aime ton idée.

28. JULIE : À cause… regarde : c'est quatre… (*Elle continue son argumentation en montrant la section verte de 4 alvéoles.*)

29. NATASHA : … sur 12. (*Elle essaie d'enlever la section verte de la douzaine, mais Julie ne veut pas.*)

30. JULIE : … Il faut que tu en mettes trois de même. (*en montrant la section verte*)

31. PATRICK : Ça fait…

32. NATASHA : Ça fait tous les douze.

33. PATRICK : Oui.

34. JULIE : (*Elle revient sur l'équivalence entre quatre douzièmes et le tiers; en continuant la phrase interrompue à la ligne 30, elle dit :*) un sur trois.

35. Natasha : (*Elle revient à son idée préalable, à savoir que les quatre douzièmes égalent une section verte, c'est-à-dire un tiers; elle enlève en silence la section verte et la remplace par quatre alvéoles simples; quand elle termine, elle dit d'un ton défiant :*) Quatre douzièmes. Voilà!

36. Patrick : (*Qui a compris l'équivalence dit :*) Tu les colles ensemble. (*il montre les quatre alvéoles simples*)

37. Julie : Non, tu fais juste utiliser… (*elle enlève les quatre alvéoles simples et les remplace par une section verte*)

38. Natasha : Non, mais on a besoin d'utiliser des douzièmes, pas un tiers. (*Son intervention vient momentanément interrompre la discussion.*)

39. Patrick : Oui? (*Il semble surpris.*)

40. Julie : Si ça, c'est un tiers, ça, c'est comment de la farine que Danielle a utilisée. (*Elle montre la section verte de quatre alvéoles; voir Figure 7; entre-temps, Natasha place un douzième dans chacune des quatre alvéoles de la section verte; voir Figure 8.*) (…)

Figure 7. Julie montre la fraction qui représente un tiers (ligne 40).

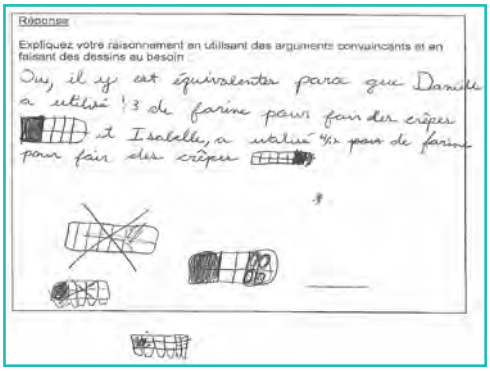


Figure 8. Natasha remplit le tiers avec des douzièmes (ligne 40) et se rend compte que « c'est égal » (ligne 41).

41. Natasha : (*En remarquant que la fraction occupée est la même, elle dit :*) C'est parce que c'est égal!

42. Julie : C'est ce que j'ai dit depuis le début, et vous m'avez dit non.

Dans cet extrait, on voit les élèves faire un effort pour se mettre d'accord. Pour y arriver, il faut qu'ils apprennent à écouter l'autre et à se donner les moyens d'interpréter ce que l'autre dit. Cela n'est pas facile du tout. Toute compréhension se fait du point de vue de celui ou de celle qui essaie de comprendre; la compréhension exige un dépassement de son propre point de vue pour s'ouvrir à ce que l'autre essaie de dire. Dans l'extrait, on voit que Natasha arrive à comprendre les propos mathématiques de Julie. Ces propos se raffinent progressivement, à mesure que la discussion avance. Natasha a dû surmonter l'obstacle qui consiste à croire que la fraction de farine qu'a utilisée Isabelle ne pouvait s'exprimer qu'en douzièmes. On voit clairement, dans ce court extrait, que Patrick ajoute peu aux arguments de la discussion, mais qu'il intériorise les propos et arrive à l'idée de fraction équivalente. Son intervention, à la ligne 36, aide Natasha à comprendre le point discuté lorsqu'il propose de voir les quatre douzièmes comme « collés ensemble ». C'est dans cet acte d'imagination qu'est saisi le sens de fractions équivalentes.

Julie avait l'idée d'équivalence dès le départ, mais elle n'est pas parvenue à convaincre les autres. Il ne suffit pas de dire quelque chose à quelqu'un pour se faire comprendre.

Organisation de la présentation et syntaxe et symboles

Les exemples précédents ont mis en évidence le rôle de la « considération des arguments » et de l'« engagement au dialogue » dans la conceptualisation mathématique des élèves. Passons maintenant aux critères « organisation de la présentation » et « syntaxe et symboles ». Bien que ces critères puissent être évalués tant à l'oral qu'à l'écrit, nous allons discuter d'un exemple écrit. La figure 9 correspond aux arguments proposés par un groupe d'élèves avant que les groupes se rassemblent pour discuter des questions.

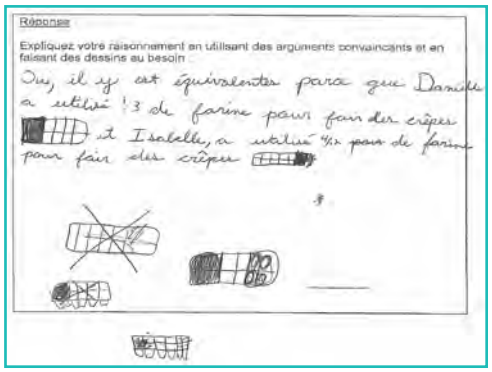


Figure 9. Texte produit par un groupe d'élèves pour expliquer le problème de Danielle et d'Isabelle.

Peut-être à cause des éléments implicites contenus dans l'explication, l'argument proposé par les élèves de ce groupe reste peu clair et convaincant. En effet, l'argument repose sur des affirmations qui restent isolées, sans que des raisons soient mentionnées explicitement. On ne *dit* pas *pourquoi* les fractions sont équivalentes. Il faut faire un travail important d'interprétation pour comprendre ce qui rend l'argument proposé valide.

Après l'interaction entre le groupe et un second groupe, on remarque que la réponse s'est raffinée (voir Figure 10). Bien que la première partie de l'argumentation soit la même que celle du premier travail, on remarque que les dessins s'articulent mieux avec le texte et que l'organisation des dessins permet de mieux saisir l'équivalence des fractions. Même si elle ne reste qu'« illustrée », la raison qui justifie l'équivalence devient maintenant plus claire. Les couleurs sont ajoutées expliquant ainsi le diagramme en partant des couleurs associées aux parties de la boîte à œufs. Le groupe s'est rendu compte que sa représentation en noir et blanc perdait un élément de compréhension significatif. Le retour aux couleurs (1 vert et 4 beiges) vient appuyer l'explication écrite.

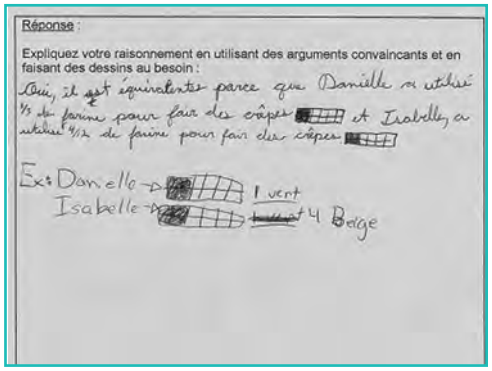


Figure 10. Réélaboration de l'explication après discussion avec un autre groupe.

Il est sûr que la réponse du groupe aurait pu être mieux organisée, mais il est tout de même intéressant de noter qu'une discussion entre deux groupes d'élèves de cinquième année a conduit à cette constatation d'imprécision et à la recherche d'une approche plus efficace pour régler le problème. Nous voyons donc que l'échange des présentations entre divers groupes peut amener les élèves à mieux organiser leurs idées et à les appuyer ainsi qu'à mieux utiliser les symboles mathématiques dans le but d'obtenir une meilleure présentation orale ou écrite de leurs arguments.

Rencontre de groupes

Nous venons de donner l'exemple d'un texte rédigé après la rencontre de deux groupes. Arrêtons-nous maintenant un moment sur une autre rencontre dont le résultat n'a pas été aussi bénéfique que nous l'aurions souhaité. Comme dans les autres cas, avant cette rencontre, chacun des groupes avait pu lire les réponses de l'autre groupe afin d'en faire une critique constructive. Après la lecture des réponses, les

groupes se sont rencontrés. Ils ont discuté des forces et des faiblesses perçues dans les solutions écrites. L'extrait ci-dessous porte sur la discussion de l'équivalence des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{12}$.

43. Marie-France : Vous êtes mal aux deux numéros. Pour le premier numéro, voici ce que vous avez fait. Vous avez dit ça, puis ça. (*elle montre les endroits appropriés sur la feuille de réponse*) Vous l'avez eu bien, excepté que vous l'avez mis dans le même carré. (*Elle veut dire « rectangle »; elle fait référence au fait que les deux fractions devaient être comparées en partant de deux illustrations distinctes des sacs de farine et non en partant du même sac de farine, illustré par le contenant d'œufs.*)

44. Tammi : À cause que… (*elle tente d'intervenir*)

45. Marie-France : Tammi, veux-tu attendre une minute, OK? Vous l'avez mis dans le même carré (*c'est-à-dire dans le même contenant d'œufs qui représente un sac de farine*) excepté quand même il t'en reste quatre et l'autre, il t'en reste quatre. Mais vraiment, ce qui est supposé rester et que nous on a fait est… nous autres aussi on l'a eu mal, on le sait, c'est parce qu'on n'a pas fait de dessins. (*Elle cherche les feuilles sur lesquelles les explications de son groupe sont écrites afin de comparer les deux.*) On l'a eu mal. Mais, ici, ce qu'on a fait (*elle montre la feuille de son propre groupe et compte les alvéoles vides sur la première figure*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et puis là, ici (*elle compte les alvéoles vides sur la deuxième figure pour montrer l'égalité*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

46. Kathie : Ça, c'est à cause qu'on voulait juste faire un… (*elle se fait interrompre par Tammi*)

47. Tammi : OK. Est-ce qu'on peut expliquer? (*Elle n'écoutait pas du tout Kathie.*) On voulait montrer que les deux étaient égaux. Les deux sont égaux. (*Elle montre sa réponse sur la feuille.*)

48. Victor : (*parlant à Georges de manière à peine perceptible*) On va les laisser se battre!

49. Georges : Hein?

50. Victor : On va les laisser se battre!

51. Marie-France : Mais il fallait que tu les mettes dans un autre carré.

52. Tammi : Vous autres, regardez! (*Elle lit le texte du groupe de Marie-France dont elle est en train de faire une critique.*) Explication. Tu as dit, il reste huit douzièmes de farine. À qui? À qui? Aux deux?

53. Marie-France : Aux deux. Regarde. (*elle lit la copie de son groupe*) Oui, les fractions de farine utilisées par Isabelle et Danielle sont équivalentes parce que 4 sur 12 est la même affaire que 1 sur 3. Il reste 8 douzièmes de farine pour les deux. (*elle a maintenant fini de lire*)

54. Tammi : À qui ça reste?

55. Marie-France : Regarde, Tammi. Quand ça dit équivalent, ça veut dire les deux.

56. Georges : (*Il s'exclame :*) Pareil!

57. Marie-France : C'est la même affaire. Ça veut dire, c'est deux personnes. Ça veut dire Danielle, Isabelle. Quand 4 sur 12… c'est Isabelle, et une sur trois, c'est Danielle. Tu vois? Ça, c'est ce que nous autres on a fait.

Du point de vue conceptuel, l'argument d'équivalence n'est pas exact. Les élèves centrent la discussion sur ce qui reste dans l'entier, alors qu'ils devraient se centrer sur les fractions elles-mêmes. En ce qui concerne la communication, cet extrait démontre clairement que le dialogue s'est limité à deux participants seulement : Tammi et Marie-France. Bien qu'elle ait peu participé à la discussion, Kathie écoutait ce que Marie-France et Tammi disaient. Georges intervenait périodiquement dans la discussion, mais pour parler de sujets non liés aux mathématiques. Les deux autres participants n'ont nullement contribué à la discussion.

Marie-France a tout de suite pris l'initiative; c'est une *leader*. Elle a monopolisé une grande partie du temps de la discussion. À la fin, les deux parties demeuraient campées sur leur position originale. L'échange entre équipes n'a pas porté ici beaucoup de fruits. Pour qu'un échange soit fructueux, les élèves doivent apprendre à être à l'écoute des autres. Les élèves doivent comprendre qu'un échange d'arguments et de points de vue ne signifie pas une lutte (voir ligne 48 ci-dessus). Cela donne une indication du genre de travail qu'il faut faire en salle de classe pour améliorer la compétence en communication chez les élèves du cycle moyen.

5. Survol et synthèse générale de l'exemple

Cette série d'extraits de dialogues et de travaux d'élèves donne quelques idées quant aux possibilités et aux limites de la communication chez les élèves de la cinquième année. Nous avons vu, au cours des exemples présentés, l'intérêt de faire travailler et discuter les élèves. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, une des justifications de la communication est de faire raisonner et argumenter les élèves. L'engagement au dialogue, l'élaboration d'arguments, l'examen des arguments des autres se sont révélés des éléments importants pour enrichir les conceptualisations des élèves.

Les élèves du cycle moyen possèdent un vocabulaire suffisamment riche et évolué pour soutenir un dialogue intéressant. Bien que, en général, l'élève du cycle moyen tienne beaucoup plus fréquemment des propos mathématiques que l'élève du cycle primaire, il n'en demeure pas moins qu'elle ou il doit apprendre de nouveaux concepts qui exigent une nouvelle terminologie; elle ou il doit aussi être en mesure de produire des explications plus poussées qui reposent sur une gamme plus ample de systèmes de représentation (phrases écrites, dessins, etc.).

Mais il faut prendre en compte qu'à cet âge, la participation active de tous les membres du groupe ne va pas de soi. Les élèves connaissent les personnes qui sont « fortes » en mathématiques et jugent qu'il est souvent favorable de ne rien dire plutôt que d'essayer de contredire ces personnes. Il en résulte donc, souvent, une communication limitée de la part d'un groupe d'élèves, en particulier de la part de ceux qui sont moins forts dans cette discipline.

Quelle est alors la meilleure façon d'encourager la communication en classe, au cycle moyen? Il faut créer une culture d'ouverture à l'intérieur de la salle de classe. Il faut que les élèves comprennent qu'en mathématiques il peut y avoir plusieurs façons d'argumenter et de contre-argumenter.

On pourrait commencer progressivement la discussion entre les groupes en clarifiant les règles d'un débat et en insistant sur celle de l'engagement responsable de chaque membre des groupes qui discutent. Dans l'exemple présenté ici, bien qu'il y ait eu des discussions intéressantes lorsque les élèves ont travaillé en groupes de trois, les résultats de la discussion entre deux groupes se sont avérés faibles. Seul

un petit nombre d'élèves a vraiment tiré partie de ces discussions. Une solution à ce problème serait d'examiner la possibilité d'assigner des rôles distincts à chacun des élèves au cours de la rencontre de groupes. Mettre l'élève dans une situation où elle ou il devient responsable de convaincre ses pairs et l'enseignante ou l'enseignant que ce que son groupe dit est juste et précis, c'est l'inviter à parler.

6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication

Il n'y a pas de recette magique pour apprendre. Il n'y a pas non plus de recette magique pour apprendre à communiquer. Voici, toutefois, certaines pistes que l'on peut essayer.

Pour qu'un travail en groupe soit efficace, les élèves doivent apprendre à faire part de leurs idées. Il faut qu'elles et ils apprennent à écouter.

L'enseignante ou l'enseignant peut faire remarquer les lacunes d'un texte explicatif comme celui à la figure 9. Elle ou il peut demander aux élèves de dire en quoi le texte à la figure 10 est meilleur que celui à la figure 9.

Le jumelage des groupes devrait être prévu à l'avance, non seulement dans le but d'assurer une discipline adéquate, mais dans le but de permettre l'avancement dans la compréhension et la résolution des problèmes présentés.

Au moment du jumelage des groupes, on pourrait penser à un protocole d'échange. Ce protocole porterait sur la marche à suivre (donner le temps à chaque groupe de s'exprimer; présenter les contre-arguments, etc.).

7. Pour en savoir plus...

Reid, D. (2002). "Conjectures and refutations in grade 5 mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.

Wright, M., and P. Foster. (1996, October). "Constructive activity for teaching elementary-school math and communications". *The Technology Teacher*, 56 (2), 20-25.

Zack, V. (2002). "Learning from learners: Robust counterarguments in fifth graders' talk about reasoning and proving". In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), A. Cockburn and E. Nardi (eds.), University of East Anglia, UK, vol. 4, p. 434-441.

Chapitre 7

La communication en mathématiques au cycle intermédiaire

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle intermédiaire
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle intermédiaire
4. Un exemple de salle de classe : les limites de la perception
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Quelques pistes d'intervention
7. Pour en savoir plus…

Comment naît donc le besoin de vérification? C'est assurément le choc de notre pensée avec celle des autres qui produit en nous le doute et le besoin de prouver.

Jean Piaget, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*.

1. Introduction

Au chapitre précédent, nous avons vu qu'un des buts de la communication au cycle moyen était d'amener l'élève à produire des textes argumentatifs comportant un niveau adéquat de clarté, de logique et d'efficacité. Au cycle intermédiaire, on doit viser un niveau encore plus élevé de sophistication des arguments. Pour comprendre le sens précis de la sophistication à laquelle on doit parvenir, il convient d'avoir présent à l'esprit que, au cycle intermédiaire, l'élève est amené à tenir des raisonnements qui portent non seulement sur tel ou tel objet particulier, mais aussi sur des objets généraux. Ainsi, les propriétés des diagonales d'un parallélogramme s'appliquent non seulement au parallélogramme qu'on a construit, mais à *tous* les parallélogrammes. La congruence d'angles ou de segments n'est pas strictement établie sur ce qu'on « voit » sur une figure. Il y a dépassement de la perception en tant que telle.

L'activité mathématique, au cycle intermédiaire, se caractérise par un passage conceptuel important qui va du particulier au général. Ce passage s'accompagne d'une transformation progressive sur le plan du raisonnement. Les raisonnements perceptifs (c'est-à-dire les raisonnements basés sur ce qu'on voit) se transforment en raisonnements qui s'appuient de plus en plus sur des relations mathématiques générales. Une démarche d'argumentation, où des raisonnements déductifs, inductifs et des abstractions sont ainsi mis en œuvre, permet la production de jugements et d'arguments d'une portée plus générale.

Le dépassement du cadre perceptif fait en sorte que le langage, les symboles et les formules mathématiques acquièrent une plus grande importance en tant que moyens de réflexion. Langage et symboles viennent objectiver le savoir d'une manière décisive. On atteint ici un niveau de généralité qui était latent dans les cycles précédents. Il devient possible, à cet âge, de produire des preuves mathématiquement plus convaincantes et d'avoir recours à des marches à suivre hautement complexes, comme le contre-exemple.

La communication en salle de classe visera alors à développer ce degré de sophistication par l'entremise d'activités appropriées. Avant de discuter des conditions de ces activités facilitant le développement, l'argumentation et le raisonnement mathématique, nous mentionnerons quelques objectifs de la communication au cycle intermédiaire. Bien sûr, ces objectifs doivent être compris dans le contexte d'une progression qui va au-delà des objectifs visés aux cycles précédents. Ainsi, on voudra encore que l'élève exprime des propos mathématiques appropriés, mais ce qu'on entend par « approprié » au cycle primaire n'est peut-être plus « approprié » au cycle intermédiaire. Il faut, en d'autres mots, comprendre l'adéquation d'un argument dans le contexte du contenu mathématique à apprendre et du développement de la pensée mathématique de l'élève.

2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle intermédiaire

En continuité avec les objectifs du cycle moyen, à la fin du cycle intermédiaire, l'élève doit pouvoir :

1. utiliser les conventions mathématiques correspondantes au cycle intermédiaire;
2. écouter les propos mathématiques de ses pairs;
3. interpréter les arguments mathématiques de ses pairs;
4. évaluer de façon critique les arguments de ses pairs;
5. exprimer des arguments mathématiques appropriés à la situation mathématique en question;
6. présenter les justifications mathématiques des arguments qu'il ou elle avance;
7. améliorer sa connaissance de ce qu'est un argument exact, clair et suffisant;
8. organiser avec logique et efficacité la présentation d'un résultat d'une activité mathématique[32].

Pour réaliser ces objectifs, les enseignantes et enseignants auront avantage à utiliser des activités de salle de classe où la communication apparaît tant dans sa dimension écrite qu'orale. La section ci-dessous donne quelques pistes concrètes d'actions pédagogiques visant à soutenir le développement de la compétence Communication chez l'élève du cycle intermédiaire.

3. Mise en place et gestion de la communication au cycle intermédiaire

Afin qu'une leçon qui mise sur la communication soit bien réussie, il faut planifier la leçon en tenant compte de certaines conditions.

Le choix de la tâche mathématique

Il faut que la tâche donnée aux élèves soit suffisamment complexe pour permettre des interactions et des échanges intéressants. Elle doit être à la fois engageante, pertinente et suffisamment complexe pour entretenir des dialogues (voir chapitre 3).

La formation judicieuse de groupes

Il est essentiel de bien planifier la formation des groupes pour que le travail des élèves soit efficace et qu'il mène aux apprentissages visés. Il ne faut pas oublier que le cycle intermédiaire est un cycle difficile en ce qui a trait aux habiletés sociales de l'élève. La perception que l'élève peut avoir de lui-même et de sa capacité à bien réussir en mathématiques peut limiter son travail en équipe. Par conséquent, il faut tenir compte de ces constatations et faire en sorte que tous les élèves participent au travail du groupe.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant

Les élèves de ce cycle sont plus autonomes que les élèves des cycles précédents, mais il n'en demeure pas moins essentiel pour l'enseignante ou l'enseignant de s'assurer que les élèves participent à l'activité

32 Pour la relation entre ces objectifs et les critères de la compétence Communication, se référer au chapitre 2.

mathématique. Les interventions de l'enseignante ou de l'enseignant devraient prendre la forme de questions qui poussent l'élève à approfondir ses propres connaissances. Un des rôles de l'enseignante ou de l'enseignant est de décider s'il est opportun d'intervenir à un moment donné de la discussion des élèves ou de laisser plutôt la discussion se poursuivre si l'on prévoit qu'en résulteront des dividendes cognitifs importants (voir chapitre 3).

Stratégies pédagogiques

La dynamique de travail en petits groupes peut prendre plusieurs formes. Par exemple, on peut utiliser la stratégie décrite au chapitre précédent. Pour le cycle intermédiaire, et aux fins d'illustration, nous avons choisi une variante de cette stratégie. La stratégie modifiée peut se résumer ainsi :

1. Introduction (mise en situation et rappel de la terminologie) de l'activité mathématique par l'enseignante ou l'enseignant.
2. Travail en petits groupes menant à la production écrite d'une ou de plusieurs explications raisonnées de solutions trouvées.
3. Rencontre avec un ou plusieurs groupes pour discussion orale et comparaison critique des textes écrits.
4. Retour aux petits groupes afin d'améliorer les résultats obtenus après la discussion de l'étape mentionnée au numéro 3.
5. Suite du travail en petit groupes pour poursuivre une tâche de généralisation des résultats obtenus au numéro 4.
6. Discussion générale.

Afin de donner une idée concrète de la façon dont la communication peut être encouragée au cycle intermédiaire, nous allons présenter, dans la section ci-dessous, des éléments concernant la mise en place et la gestion de la communication dans une classe de 7e année.

4. Un exemple de salle de classe : les limites de la perception

L'activité présentée aux élèves relève du domaine de la Géométrie et sens de l'espace. Plus spécifiquement, elle relève des constructions géométriques en 7e année. Notre activité, loin de se limiter à un exposé magistral, visait à faire en sorte que les élèves prennent conscience de la raison d'être des étapes de construction de quelques objets géométriques élémentaires.

Ce choix pédagogique relève, bien sûr, d'une position générale sur l'apprentissage. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, l'apprentissage est selon nous lié à une prise de conscience progressive de ce qu'on apprend. On n'apprend pas d'un seul coup. L'apprentissage est un processus qui passe par une réflexion. Au cours de ce processus, des concepts culturels (tels que « médiatrice », « moyenne », « équation », etc.) sont transformés en objets de conscience par l'intermédiaire du langage, d'outils et de symboles.

La leçon s'est déroulée sur deux jours. On trouvera en annexe, après le chapitre 10, la description complète de cette leçon ainsi que quelques commentaires pour faciliter sa mise en place en salle de classe. Mentionnons ici brièvement l'attente et le contenu d'apprentissage tirés du programme-cadre de Mathématiques de l'Ontario se rapportant à la leçon :

– Domaine : Géométrie et sens de l'espace.

– Attente : Utiliser différents instruments pour effectuer des constructions géométriques.

– Contenu d'apprentissage : Identifier et construire des droites parallèles, des médianes, des médiatrices et des bissectrices à l'aide de divers instruments et techniques (p. ex., Mira, compas, pliage).

L'enseignante a commencé en faisant une révision de la terminologie et en expliquant l'activité de la première journée. Cette activité consistait à étudier les propriétés géométriques (côtés parallèles, types d'angles, etc.) d'un quadrilatère construit à l'aide de deux cerceaux et d'une règle non graduée et à dégager les étapes de construction de la médiatrice d'un segment donné.

Pendant la première partie de la leçon, les élèves ont travaillé en groupes de trois ou quatre. Chaque groupe s'est installé à une station de travail où il y avait un rouleau de corde, un rouleau de ruban gommé, une paire de ciseaux, un stylo-feutre, un mètre non gradué et un carton où l'on avait dessiné deux points, « A » et « B ». Chaque groupe avait une feuille d'activité (ou feuille de route) contenant plusieurs questions; en répondant à ces questions, les élèves devaient fournir des justifications. Pour aboutir aux objectifs 1, 5, 6, 7 et 8, mentionnés à la section 2 ci-dessus, on a encouragé les élèves à échanger et à justifier leurs raisonnements au sein du groupe.

Une fois que chaque groupe a répondu aux questions, il a rencontré un autre groupe (préalablement désigné par l'enseignante) afin d'échanger ses résultats et d'en discuter (objectifs 2, 3, 4, 6, 7 et 8). Les résultats et leurs justifications pouvaient être modifiés à la suite des échanges entre les groupes (objectifs 2, 3, 4, 5 et 8).

Le lendemain, les élèves devaient déterminer, en continuant le travail en petits groupes, les étapes à suivre pour construire une médiatrice à l'aide de deux outils : un *compas* et un bâtonnet en bois (qui a joué le rôle d'une règle non graduée). Les élèves devaient donc procéder à une sorte d'adaptation et de généralisation des résultats trouvés la veille à l'aide du cerceau et de la règle non graduée (objectifs 1, 2, 3 et 8). Le but de cette activité était de permettre aux élèves de rédiger un texte comportant les étapes de construction de la médiatrice et de l'échanger avec un autre groupe. Les élèves ont remis à l'enseignante leur texte aux fins d'évaluation formative (objectifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8).

Dans ce qui suit, nous illustrons, à l'aide d'une série d'exemples concrets tirés des transcriptions d'élèves, la manière dont : (1) la conception de l'activité mathématique et (2) la gestion de la classe en petits groupes et sa dynamique sociale d'échange d'idées permettent aux élèves de participer au développement de la compétence Communication.

Engagement au dialogue

Tel que nous l'avons mentionné au chapitre 2, ce descripteur sert à évaluer la capacité de l'élève à exprimer des propos ou à présenter des arguments pour faire valoir ses points de vue mathématiques. L'élève a-t-il la capacité d'argumenter ses points de vue? Est-ce qu'il le fait avec clarté, pertinence et profondeur?

L'extrait ci-dessous provient de l'enregistrement vidéo de la première journée concernant la première partie de l'activité. L'extrait débute lorsque les élèves viennent tout juste de répondre à la question où nous leur demandions d'identifier tous les angles aigus (voir la leçon dans l'annexe, après le chapitre 10) et commencent la question suivante, où ils doivent identifier les angles obtus et expliquer pourquoi ces angles sont obtus.

Comme on le verra, l'extrait montre très bien comment les élèves s'engagent dans un dialogue qui permet le raffinement progressif des idées de chacun. On y voit en particulier la capacité de Judith et de Maryse de s'approprier une idée de Jean-François et, à partir de là, d'exprimer leurs arguments. Le dialogue porte essentiellement sur le quadrilatère que les élèves ont construit et qui est illustré à la figure 1.

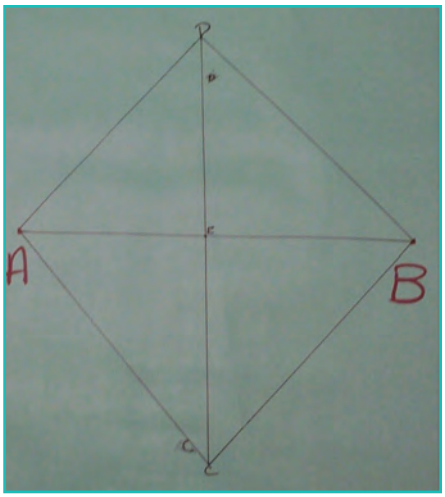


Figure 1 : Le quadrilatère construit par les élèves à l'aide des outils fournis : cordes, cerceaux, etc. Les côtés du quadrilatère ACBD sont en fait des rayons de cerceaux égaux.

1. Maryse : Identifier les angles obtus. Les angles obtus… CBD. (*Elle montre du doigt l'angle sur le carton à l'aide d'un geste qui commence sur le point C, continue sur le segment CB, puis BD.*) Ah non! ça, ce n'est pas obtus… (*Elle regarde attentivement l'angle, puis elle dit :*) Il n'y a pas d'angles obtus là-dedans… (*Les élèves considèrent pendant un certain temps l'angle CBD en silence en essayant de déterminer s'il s'agit d'un angle obtus ou non; Maryse fait un geste des mains pour essayer d'estimer l'ouverture de l'angle CBD; voir Figure 2.*)

2. Jean-François : (*Il place la page blanche sur l'angle CBD afin de prouver que l'angle est plus grand que l'angle droit formé par le coin de la feuille de papier; en comparant l'angle CBD à l'angle droit fourni par le coin de la feuille de papier, il dit :*) Ça, c'est obtus. (*voir Figure 3*)

3. Judith : Pour que ça soit obtus, il faut que ça ait l'air de même. (*Elle longe le segment AB avec son doigt pour montrer un angle de 180 degrés.*)

4. Maryse : Non, ça n'a pas besoin d'aller de même, ça peut être ici. (*Elle place la page blanche sur l'angle CBD comme avait fait Jean-François.*) Regarde! […] (*En se référant aux quatre angles du quadrilatère ABCD, elle dit :*) Ces quatre [angles] ici, on les a marqués aigus, mais ils sont obtus.

5. Judith : Non, ils ne le sont pas. Regarde!

6. Maryse : Oui, ils le sont, regarde!

7. Judith : (*En se référant à l'idée d'utiliser le coin de la page, elle dit :*) Seulement si tu les mets de même (*En plaçant le coin de la page sur CBD, elle voit l'espace entre la position de la feuille indiquant 90 degrés et la ligne sur le carton; elle dit :*) DBC… (*à ce moment, elle se rend compte que DBC est obtus*)

8. Maryse : À cause que BCA et CAD… (*elle montre les quatre angles*)

9. Judith : On ne les a pas marqués aigus. (*Elle se réfère aux angles aigus qui devaient être identifiés à la question précédente de l'activité.*)

10. Maryse : Oui.

11. Judith : Pourquoi?

12. Maryse : Je ne sais pas. Regarde ADB. (*Elle montre la feuille de réponse indiquant que l'angle avait été catégorisé comme aigu auparavant. Judith modifie la feuille de réponse en conséquence.*)

13. Maryse : DBC, oui, c'en est un.

14. Judith : C'en est un quoi?

15. Maryse : Obtus. Puis CAD, celui-là aussi. Puis BCA.

16. Judith : Angle ADB.

17. Maryse : DBC […] BCA, CAD.

18. Judith : Pardon?

19. Jean-François et Maryse : CAD. (*ils répètent ensemble*)

20. Maryse : (*En écrivant une justification à la réponse, elle dit :*) Ils sont des angles obtus parce qu'ils mesurent plus que 90 degrés.

On remarque que Jean-François fait part, communique ou argumente très peu comparativement aux deux autres élèves. Il joue tout de même un rôle important dans la discussion, car c'est lui qui suggère au groupe le « test de la feuille de papier » pour déterminer si un angle est obtus ou non (ligne 2; figure 3). Le test de la feuille de papier vient remplacer l'essai que Maryse a fait en utilisant ses bras pour estimer l'ouverture de l'angle (figure 2). On voit que l'activité intellectuelle commence à dépasser la cognition perceptuelle : on ne se contente pas de se fier aveuglément aux apparences. Bien que, reposant encore en partie sur la cognition perceptuelle, l'angle droit de la feuille constitue un outil pour accomplir une preuve pragmatique plus sophistiquée que la seule preuve fournie par les sens. Une fois que Maryse et Judith se rendent compte de l'utilité de la feuille de papier, elles s'en servent pour appuyer leurs arguments. Par là, elles donnent suite au propos de Jean-François et l'appliquent avec succès. C'est Maryse qui reprend en premier l'idée de Jean-François et la met en application pour étudier les autres angles. Judith s'approprie l'idée peu à peu. On la voit l'appliquer à la ligne 7.

Figure 2. Maryse fait un geste des mains pour essayer d'estimer l'ouverture de l'angle CBD.

Figure 3. Jean-François place la page blanche sur l'angle CBD afin de prouver que l'angle est plus grand que l'angle droit formé par le coin de la feuille de papier.

Remarquons néanmoins que les élèves commettent une faute. Ce n'est pas vrai que tous les angles du quadrilatère sont obtus. Il y a deux angles aigus. Le « test de la feuille de papier » a servi

à mettre en évidence les deux angles obtus. À partir de là, les élèves généralisent ce résultat pour tous les angles du quadrilatère. Peut-être que s'ils s'étaient méfiés davantage de leurs sens et s'ils avaient eu l'idée d'appliquer le même test à l'angle ACB ou à l'angle ADB, auraient-ils pu distinguer les angles. Bien sûr, commettre des erreurs comme celle-ci fait partie de l'apprentissage.

Considération des arguments

Du point de vue de la considération des arguments, l'extrait ci-dessous est intéressant en ce qu'il montre deux approches pour essayer de déterminer la condition de parallélisme. L'extrait montre la difficulté qu'éprouvent les élèves à comprendre les arguments des autres. Avant d'amorcer l'extrait, il faut noter que la question de l'identification des segments parallèles est conceptuellement très difficile étant donné les connaissances théoriques limitées des élèves. En posant cette question, nous voulions faire émerger des positions variées au sujet du parallélisme pour en discuter par la suite. Une des approches proposées pour étudier le parallélisme est celle de Nanette; il s'agit d'une approche qui reste ancrée sur le visuel. La deuxième approche, présentée par Shawn, reste aussi liée au visuel, mais elle commence à intégrer des éléments un peu plus intellectuels : deux droites sont parallèles si elles gardent la même distance l'une de l'autre. Comme on le verra dès la première ligne de l'extrait ci-dessous, bien que les deux méthodes fassent appel au critère de conservation des distances pour étudier le parallélisme de droites, dans le cas de Nanette, le critère n'intervient que sur le plan visuel. Shawn, par contre, l'incorpore dans la démarche qu'il propose en mesurant les distances. Jacques et Patrisha, les deux autres élèves de ce groupe de 4, restent partisans du visuel.

Shawn tentera de prouver que deux des côtés opposés du quadrilatère dessiné semblent être parallèles, mais ne le sont pas en réalité. Nanette n'est pas du tout ouverte à l'argumentation de Shawn. Elle procède à une généralisation qui n'arrive pas à convaincre Shawn.

1. Nanette : (*En lisant la question 3 de la feuille, elle dit :*) Identifiez tous les segments de droites parallèles… parallèles… tu sais les lignes qui ne vont jamais se toucher. (*Pour expliquer à ses pairs le concept de parallélisme, elle esquisse en se servant de ses mains deux droites qui avancent à égale distance l'une de l'autre.*)

2. Shawn : Il n'y en a pas. Ah oui! Eux autres ici. (*il indique les segments AC et DB*)

3. Nanette : Lesquels? […]

4. Shawn : AC, AB. Non! AC, puis DB.

5. Nanette : AC est parallèle à DB. OK. Là AD [est parallèle à] CB. (*elle montre les segments respectifs lorsqu'elle parle*)

6. Shawn : Je ne pense pas qu'ils le sont.

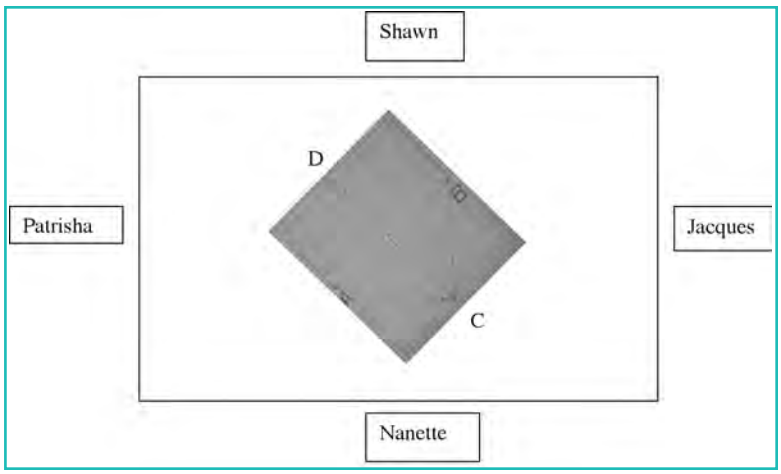


Figure 4. Position des élèves par rapport au quadrilatère.

7. Nanette : Oui, regarde. Si ça l'est (*elle montre AC et DB*), [alors] il faut que ça (AD et CB) le soit. (*elle montre AD et CB*)

8. Shawn : Elles (*AD et CB*) ne sont pas parallèles.

9. Patrisha : Bien, c'est pareil!

10. Jacques : Si tu t'en viens de même (*il montre la droite AC*), lui (*il montre CB*) il va toucher là. (*ses deux doigts se rejoignent au point C*)

11. Shawn : (*en ignorant Jacques*) Elles (*AD et CB*) ne sont pas parallèles.

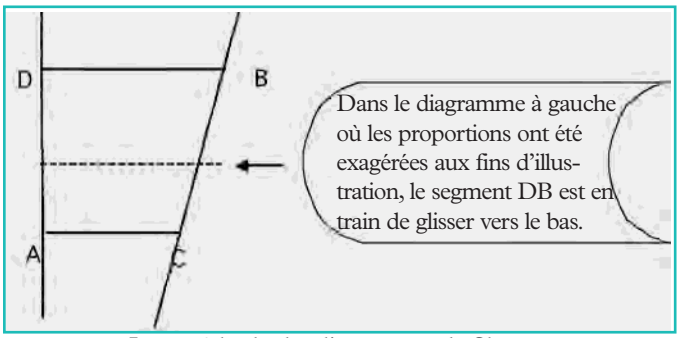
12. Nanette : Non, les deux ici! (*elle montre AD et CB*)

13. Shawn : Elles (AD et CB) ne le sont pas.

14. Nanette : Comment tu sais?

15. Shawn : Je te le jure... (*il se baisse au niveau de la table pour mieux suivre des yeux les deux droites; voir Figure 5*) On va mesurer. (*Il prend la règle non graduée et mesure la longueur de DB en marquant du doigt la position sur la règle; voir Figure 6; il glisse ensuite la règle vers AC en essayant de conserver la règle parallèle à DB. Quand il arrive au segment AC, il remarque que la longueur de DB est plus grande que celle de AC. En se référant à la « distance » entre les droites, il dit :*) Ce n'est pas égal tout le long!

Shawn a mesuré les segments DB à l'aide de la règle non graduée; la mesure est indiquée par son doigt sur la règle; il glisse la règle vers AC en essayant de garder la règle parallèle à DB; il note que la longueur de BC telle qu'elle est marquée sur la règle est plus grande que celle de AD. Cela, suggère-t-il, prouve que AD et CB ne sont pas parallèles.



La « méthode du glissement » de Shawn.

Figure 5. Shawn, au fond, à droite, se baisse au niveau de la table pour examiner les segments AD et CB, alors que Nanette glisse ses mains sur ces segments pour montrer le parallélisme.

Figure 6. Shawn mesure la longueur du segment DB. Il mesure ensuite AC et conclut que la longueur de DB est plus grande que celle de AC, ce qui prouve que, si on prolonge les droites, celles-ci vont se rencontrer.

Figure 7. Nanette enlève la règle des mains de Shawn et mesure la longueur de BC, puis de AD. Elle constate que les deux droites sont de la même longueur, et dit : « Voilà! »

Notons que Shawn n'explicite pas son argument. Nanette semble interpréter les propos de Shawn en lui faisant dire que, si les segments sont de même longueur, les droites qui les prolongent restent parallèles. Elle procède alors au même test et termine par un « Voilà! » conclusif (voir Figure 7). D'après elle, elle a pu défendre sa thèse en utilisant la méthode de Shawn. Par la suite, Shawn s'oppose à cette idée. Mais l'opposition reste sans explication cohérente, et Nanette ne peut pas suivre les propos de Shawn.

16. Shawn : Ce n'est pas la longueur! Ce n'est pas la longueur!

17. Nanette et Jacques : Oui!

18. Shawn : Parallèle, c'est quand elles ne se touchent jamais. (*Il fait des gestes des mains indiquant que les deux droites se poursuivent toujours à même distance l'une de l'autre.*)

19. Jacques : Elles ne se touchent jamais.

20. Patrisha : Elles peuvent continuer de même, et elles ne vont jamais se toucher. (*Elle suit les lignes AD et CB de ses doigts à l'extérieur du carton, toujours à la même distance l'une de l'autre.*)

21. Shawn : Si elles vont de même, elles vont devenir plus petites. (*Il suit les droites AD et CB de ses mains et les poursuit à l'extérieur du carton où il touche ses deux mains ensemble pour indiquer que les droites vont se toucher.*)

22. Patrisha : Si elles vont de même, elles vont se toucher. (*Elle montre en se servant de ses doigts des droites qui sont perpendiculaires.*)

23. Nanette : Ça ne fait pas de différence, elles continuent droite de même sans jamais se toucher. (*Elle prolonge les droites AD et CB en se servant de ses avant-bras montrant que ses mains ne se touchent pas.*)

24. Shawn : Oui, mais elles vont de même, elles vont se toucher. (*il montre de nouveau AD et CB*) Elles vont comme ça… regarde, ça s'en vient plus petit. (*en se référant à la distance entre les droites*)

25. Nanette : Oui, je sais, mais elles s'en vont droit… Elles sont parallèles. (*Elle est assise près de la droite AC et Shawn est assis près de la droite DB. Elle est d'accord que la droite AC est plus courte que DB, mais elle croit toujours que les droites AD et BC sont parallèles.*)

Les difficultés auxquelles se heurte le groupe sont très importantes. Elles ne sont pas propres à ce groupe. Il s'agit en fait de difficultés auxquelles devront faire face tous les élèves du cycle intermédiaire. On peut distinguer deux types de difficultés. La première est d'ordre cognitif; la seconde correspond à la compréhension de la nature même des mathématiques. Commentons-les dans l'ordre.

La difficulté cognitive

Du point de vue cognitif, la difficulté réside dans la tension entre l'objet concret perçu et l'objet général ou conceptuel. Comme le signalait déjà le philosophe Kant au XVIIIe siècle, tout raisonnement doit faire appel aux sens et au concret. Ainsi, il est impossible de penser sans avoir recours à des symboles concrets (figures, symboles numériques, etc.). Leibniz – autre philosophe allemand prédécesseur de Kant – s'amusait à demander à ses amis de faire des additions de deux nombres de trois chiffres sans écrire. Les amis s'étonnaient de la difficulté de la tâche. Sans recours aux sens et au concret, il est, en effet, presque impossible de faire quoi que ce soit. La question est de savoir jusqu'à quel point on peut se fier aux sens, en particulier

à ce qu'on voit (c'est-à-dire au perceptif). L'extrait précédent montre deux tendances différentes. Nanette se montre plus confiante que Shawn relativement à ce que ses sens peuvent lui apprendre. Shawn arrive à introduire le critère mathématique d'égalité de distance (mesurée selon la direction d'une transversale) qui caractérise les droites parallèles. En fait, il utilise un raisonnement logique sophistiqué apparenté au raisonnement par l'absurde, même s'il ne le désigne pas comme tel[33]. En termes explicites, le raisonnement de Shawn serait le suivant : si les droites étaient parallèles, elles resteraient toujours à la même distance. Or, puisqu'il y a deux endroits où les droites AC et BD ne se trouvent pas à la même distance, ces droites ne sont pas parallèles. Cela ne veut pas dire que Shawn produit une preuve purement intellectuelle. Dans sa démarche, Shawn utilise en fait des arguments perceptifs importants. Il glisse la règle vers AC en essayant de la garder parallèle à DB. Mais comment peut-on savoir s'il n'y a pas eu de changement d'angle, si petit soit-il, au cours de l'action? Du point de vue de l'apprentissage, le passage du mode perceptif au mode intellectuel ne se fait pas d'emblée. C'est un apprentissage qui va durer de longues années.

La difficulté mathématique

La difficulté d'ordre mathématique est la suivante : le parallélisme en question visait-il les segments particuliers et spécifiques dessinés sur le carton ou s'agissait-il plutôt d'objets idéaux définis par la marche à suivre géométrique de construction de segments suivie par les élèves?

En d'autres mots, parlons-nous en salle de classe du quadrilatère ACBD qui est là, dessiné matériellement sur le carton ou de l'objet idéal *représenté* par ce quadrilatère? Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas d'une question purement philosophique : elle a des conséquences très importantes par rapport à ce que nous faisons en salle de classe.

En effet, s'il s'agit du quadrilatère matériel, il serait très difficile de dire *avec certitude*, en utilisant des arguments basés seulement sur la mesure des segments, si DB est vraiment plus grand que AC. Quelle précision peut nous donner une règle? Une précision de l'ordre des dixièmes? centièmes? Il y a une limite au-delà de laquelle la mesure avec une règle (ou avec n'importe quel autre instrument) ne peut plus nous renseigner. Il se peut que la mesure des segments semble être la même, mais qu'en réalité les segments soient de longueurs différentes. Il faut amener l'élève à comprendre que le quadrilatère matériel est une représentation du quadrilatère idéal qui reste défini par la série d'étapes menant à sa construction. Dans ce cas, le raisonnement à suivre est que les côtés du quadrilatère sont des rayons de cercles identiques, et que, par conséquent, ils sont de même longueur, même si, en raison des imperfections du dessin, AC semble être plus petit que DB.

La distinction entre la représentation d'un objet mathématique et l'objet lui-même est des plus difficiles. Mais elle doit être abordée en salle de classe, sans quoi on ne pourra pas déborder du domaine du perceptuel. Il ne s'agit pas d'entrer dans des détails subtils; on peut y accéder en faisant ressortir le fait que le dessin est un diagramme dont les parties (segments, points, etc.) doivent toujours être interprétées en fonction des propriétés mathématiques utilisées dans la construction.

L'extrait ci-dessous, provenant du groupe de Jean-François, Judith et Maryse montre un type d'intervention qui amène les élèves à interpréter les objets géométriques en fonction de leur construction.

---

33 Rappelons que, dans un raisonnement par l'absurde, on procède comme suit : pour prouver qu'une proposition est vraie, on part de l'hypothèse qu'elle est fausse. Si cette hypothèse nous amène à une contradiction, cela veut dire que la proposition est bel et bien vraie. Si on veut prouver que l'ensemble de nombres premiers est infini, on peut supposer l'opposé (c'est-à-dire que cet ensemble est fini) et aboutir à une contradiction. La contradiction prouve qu'il y a une infinité de nombres premiers.

1. **Enseignant :** Est-ce que je peux vous poser une question? Pourquoi dites-vous que tous les segments sont égaux?

2. **Maryse :** Parce que, s'ils étaient faits avec une règle, ça (leur longueur) serait supposée d'être pareille […] avec les bonnes mesures, ça serait supposée d'être pareille.

3. **Enseignant :** Mais, ça serait quoi la raison?

4. **Judith :** Parce que les perpendiculaires sont 90 degrés […]

5. **Enseignant :** Si on ne savait pas que ça, c'est perpendiculaire, est-ce qu'on pourrait encore dire que… les côtés du quadrilatère sont égaux?

6. **Judith :** Non…

7. **Maryse :** Il faudrait que tu les mesures…

8. **Judith :** Pas vraiment.

9. **Maryse :** Juste si tu les mesures […]

10. **Jean-François :** Ces deux-là (*les segments AB et CD*) pourraient être perpendiculaires.

11. **Enseignant :** (*Maryse se met à mesurer les côtés avec la règle; l'enseignant dit :*) Là, ce que tu es en train de faire, c'est d'utiliser la règle.

12. **Judith :** (*en expliquant à l'enseignant*) Pour essayer de voir si c'est à peu près la même chose.

13. **Enseignant :** Comment est-ce que vous avez trouvé le point D et le point C? […]

14. **Judith :** C'est là où les cercles s'intersectent… là où les cerceaux s'intersectent.

15. **Enseignant :** Ah! (*Il profite de l'occasion présentée par Judith, qui parle des cerceaux.*) Parce qu'ici il y avait le cerceau! Oui!

16. **Judith :** Oui!

17. **Enseignant :** (*En indiquant de la main le segment AD, il dit :*) Ça, c'est quoi par rapport au cerceau?

18. **Judith :** (*L'enseignant apporte un des cerceaux qui se trouvent sur la table à côté et place le centre du cerceau, qui est indiqué par une intersection de diamètres faite avec une corde, sur le point A.)* Oui, ça, *(Elle indique les points A, B, et reconstruit la marche à suivre en disant :)* c'étaient les deux centres du cerceau, puis il fallait qu'on les rejoigne avec les points d'intersection (des cerceaux).

19. **Enseignant :** (*En faisant un geste de la main, il montre le rayon AC du cerceau; voir Figure 8.*) Comment est-ce qu'on appelle ça? […]

20. **Maryse :** Un rayon.

21. **Enseignant :** C'est un rayon! […]

22. **Enseignant :** Puis ça… (*Maryse interrompt et identifie le segment CB comme étant un autre rayon.*)

23. **Enseignant :** Et ça? (*Il montre les segments BD et AD.*)

24. **Judith :** (*en se référant aux côtés du quadrilatère*) Ça, c'est un rayon, puis ça, puis ça et ça.

25. Enseignant : Alors, pourquoi est-ce que ces côtés sont égaux?

26. Judith : À cause que ce sont les rayons.

27. Maryse : À cause que ce sont les rayons de deux cercles, puis les deux cercles sont de la même grandeur!

28. Enseignant : Ah! OK (*en récapitulant ce qui vient d'être dit*), on n'avait même pas besoin de mesurer avec la règle, parce que c'étaient les rayons des cerceaux! […] (*L'enseignant part et les élèves continuent leur discussion.*)

Figure 8. L'enseignant montre d'un geste de la main droite le segment AC qui correspond, dans la construction, à l'un des rayons du cerceau dont le centre est le point B (indiqué par la main gauche de l'enseignant).

29. Judith : Les quatre segments […] ont été formés par…

30. Maryse : (*interrompt pour compléter la phrase*) Les rayons.

31. Judith : Les rayons.

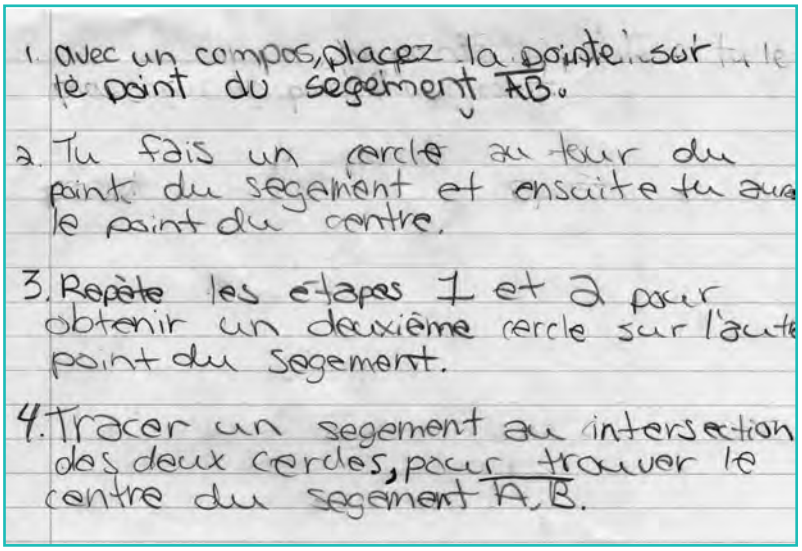
32. Maryse : (*en continuant la phrase*) De deux cercles de la même grosseur.

Organisation de la présentation

L'élève du cycle intermédiaire doit organiser, présenter et appuyer ses idées à l'aide de différentes formes de communication. Il doit le faire avec clarté, logique et efficacité. Encore une fois, il serait possible d'évaluer ce critère à l'oral ou à l'écrit. Nous nous limiterons ici, pour des raisons d'espace, à l'organisation de la communication sous sa forme écrite. Nous examinerons un texte expliquant les étapes de construction de la médiatrice à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. Ce texte a été produit par les élèves la deuxième journée de la leçon, puis a été échangé entre les groupes. Il y a eu, par la suite, une rencontre pour discuter des points forts et faibles de chaque production de groupe (voir la leçon en annexe, après le chapitre 10).

Comme on peut voir sur la figure 9, les élèves n'ont pas inséré de dessins décrivant les étapes à suivre ni d'exemples.

Le prochain texte (figure 10) montre plus de clarté, de logique et d'efficacité. Le groupe utilise des dessins afin de mieux communiquer les étapes à suivre. On y trouve aussi



1. avec un compas, placez la pointe sur le point du segement AB.
2. Tu fais un cercle au tour du point du segement et ensuite tu aura le point du centre.
3. Repète les étapes 1 et 2 pour obtenir un deuxième cercle sur l'autre point du segement.
4. Tracer un segement au intersection des deux cercles, pour trouver le centre du segement A.B.

Figure 9. Description faite par un groupe d'élèves des étapes à suivre pour trouver la médiatrice d'un segment. Le texte s'en tient à un minimum d'informations, souvent présentées sans les précisions adéquates.

des étapes très détaillées qui permettraient à n'importe qui de reproduire une médiatrice en utilisant un bâtonnet et un compas. Le groupe s'est aussi assuré que la démarche est claire en incluant des lettres pour désigner des points importants sur le diagramme (les points C et D, par exemple). Ce travail est organisé, clair et logique, et montre une maîtrise plus grande que le texte précédent du critère « organisation de la présentation » de la compétence Communication.

Il faut tout de même signaler que, pour que la construction soit possible, le rayon du cercle doit respecter une condition : la longueur du rayon doit être plus grande que la moitié du segment AB, sans quoi les cercles ne vont pas se couper. C'est cette condition qui semble être indiquée, mais de façon ambiguë, à la ligne 1, où il est indiqué « assez grosse mesure ».

Comment fabriquer une médiatrice précise sans règle, avec ton compas.

1= Choisis une mesure de rayon pour ton cercle avec ton compas et écrit le sur ton bâtonnet (assez grosse mesure)

2= Place le pique ton compas sur un des deux points (A ou B) ensuite trace ton cercle et plus trace l'autre.

3= Fait deux points ou les deux cercles s'intersectent Identifie-les (C,D) et trace un segment entre ces deux points.

4= Fait un point où les segments AB et CD s'intersectent et identifie le par la lettre E.

5= Vérifie avec un objet que tu as avec toi qui a un angle de 90°, par ex, une feuille de papier, pour voir si ta médiatrice a quatre angles de 90°.

6= Vérifie avec la règle (Mme: _____ va te la donner) si ta médiatrice est bien centrée.

7= Indiquer les parties des segments qui sont congrus à l'aide de petites lignes.

8= Finalement indique que tes angles sont de 90°.

Figure 10. Construction d'une médiatrice proposée par un autre groupe. On y voit un souci de rendre le message plus clair.

Syntaxe et symboles

Pour étudier la maîtrise du critère « syntaxe et symboles », on peut utiliser la même figure qu'on a utilisée pour le critère « d'organisation de la présentation ». En particulier, la figure 9, illustrant un rendement faible sur le plan de l'organisation de la présentation, est aussi faible sur le plan de la syntaxe. Des points et d'autres objets géométriques insérés dans la construction ne sont pas mentionnés de façon explicite à l'aide de lettres. Par contre, le texte de la figure 10 montre comment faire des objets géométriques, ce qui rend le message plus clair. Comme nous l'avons noté précédemment, l'insertion de dessins vient clarifier le message.

Rencontre de groupes

Au chapitre précédent, lors de notre discussion de la communication dans une classe de 5e année, nous avons indiqué que la rencontre entre groupes exigeait souvent une structuration précise pour pouvoir assurer la participation active de tous les élèves. Dans la classe de 7e année, nous avons remarqué que les élèves s'impliquaient davantage et avec beaucoup plus d'autonomie. Les échanges sont beaucoup plus soutenus et l'argumentation devient plus poussée[34].

34 Bien sûr, nous ne pouvons pas généraliser ce résultat à l'échelle de toutes les classes de cinquième et de septième année. Comme nous l'avons souligné aux chapitres 1, 2 et 3, le développement est lié à l'apprentissage. Des élèves qui ont bénéficié d'un enseignement favorisant la maîtrise de la compétence Communication durant plusieurs années peuvent atteindre des niveaux d'autonomie et de raisonnement plus élevés que des élèves du même âge ou que des élèves plus âgés ayant reçu un enseignement traditionnel.

L'exemple ci-dessous montre très bien le genre de discussions qui ont eu lieu entre les groupes. Un groupe de trois individus (Julie, Jules-Pierre et Simon) rencontre le groupe de quatre individus (Nanette, Shawn, Jacques et Patrisha) que nous avons eu l'occasion de mentionner à la section « Considération des arguments ». La discussion porte essentiellement sur le problème des droites parallèles. Le groupe de quatre élèves tente de convaincre le groupe de trois élèves que les droites AD et CB ne sont pas parallèles. (Quand la rencontre a eu lieu, Nanette a adopté le point de vue de Shawn.)

1. Julie : Un parallélogramme, tous ses bords sont parallèles.

2. Shawn : Mais lui, c'en est pas un.

3. Nanette : (*En voyant que l'autre groupe ne croit pas Shawn, elle intervient et dit :*) Regarde. (*Elle suit de ses avant-bras les droites AD et CB; voir Figure 11; elle continue à se servir de ses bras pour faire le geste, elle exagère le fait que les droites vont plus loin se rencontrer; voir Figure 12.*)

Figure 11. Nanette commence le geste pour montrer que les droites ne sont pas parallèles.

4. Shawn : (*Avec assurance, il dit :*) Je l'ai mesuré.

5. Julie : Regarde! Ils disent qu'elles vont se refermer. Elles ne se referment pas. C'est un parallélogramme! (*Elle parle à l'enseignant qui les regarde, cherchant un appui. Mais l'enseignant décide de ne pas intervenir.*)

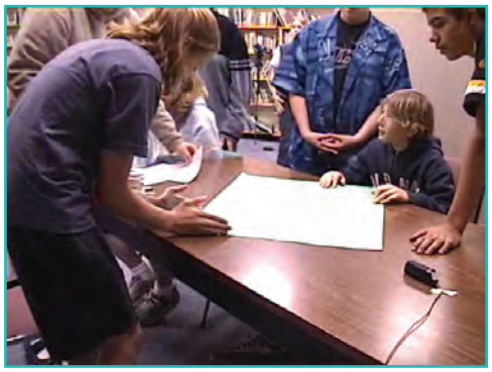


Figure 12. Fin du geste où Nanette montre en se servant de ses mains que la distance entre les droites devient de plus en plus petite.

6. Nanette : Ils vont se fermer! Regarde! Tu vas de même (*elle fait le même geste de ses avant-bras qu'à la figure 11*), et puis ça va continuer à se rapetisser de même. (*ses avant-bras se referment au fur et à mesure que le geste se poursuit*) […]

7. Jules-Pierre : Avez-vous un mètre?… Je vais aller chercher deux mètres, et on va voir!

Les trois élèves du groupe sont complètement incrédules. Le groupe de quatre élèves tient fermement à son résultat. Pendant que Jules-Pierre part chercher les règles, beaucoup de discussions et d'argumentation s'ensuivent, mais les élèves n'arrivent pas à convaincre les autres. Un peu de temps passe, et Jules-Pierre revient avec deux règles. Shawn prend une règle et montre sa méthode de glissement de la règle pour vérifier que les lignes ne sont pas parallèles au grand plaisir des membres de son groupe. Mais il n'arrive pas à convaincre les opposants. Nanette prend la relève :

8. Jules-Pierre : Regarde. Mets-les de même. (*Il cherche à placer une règle sur la droite DB et l'autre sur AC; il veut ensuite comparer, en regardant de près, l'allure des règles afin de déterminer s'il y a ou non parallélisme.*) C'est droit! Regarde! (*Une des difficultés – mais ce n'est pas la seule – est que Jules-Pierre et son groupe vérifient si AC et DB sont parallèles, tandis que Shawn et son groupe travaillent sur AD et CB.*)

9. Nanette : (*Elle applique la « méthode du glissement » : elle déplace la règle qui se trouve sur AC en la dirigeant vers BD; voir Figure 13. Au cours du glissement, elle dit :*) Là, elle continue d'aller de même. Elle continue…. Vérifie mon doigt où il est rendu! Ça va toujours droit… (*ce qui veut dire que, au moment du glissement, elle s'assure que le parallélisme de la règle qu'elle déplace est conservé*)

Figure 13. Nanette fait glisser la règle en la changeant de position (AC vers BD). Son index droit marque la longueur du segment AC. Au moment du glissement, elle essaie de garder la règle en position parallèle à AC. Shawn observe attentivement le glissement de la règle. À côté de Shawn, debout, Jules-Pierre observe également la démarche de Nanette et dit : « Tu l'as bougée! ».

10. Jules-Pierre : Tu l'as bougée! (*Par là, il indique que le parallélisme lors du glissement a été perdu, ce qui met en échec la méthode du glissement.*)

11. Nanette : Non! Je ne l'ai pas bougée!

12. Jules-Pierre : Oui! Tu l'as bougée! (*On entend des voix qui disent en même temps « elle l'a bougée » et d'autres qui disent « elle ne l'a pas bougée ».*)

13. Nanette : Oh! Non! (*Elle lâche la règle et abandonne, découragée de ne pas avoir pu convaincre l'autre groupe.*)

La discussion se poursuit entre les élèves, pour conclure par une question destinée à l'enseignant à qui l'on demande de trancher le débat. Les deux groupes sont dans une impasse, et il semble que seul l'enseignant puisse résoudre leur dilemme.

La discussion de groupe a été très mouvementée durant ce court épisode. Tous les élèves ont participé de façon organisée et logique, beaucoup plus qu'en 5e année. Les arguments mis en avant s'appuyaient sur des raisons différentes, mais les positions de départ étaient très éloignées l'une de l'autre. L'une des raisons de cet éloignement initial est que le groupe de Julie est allé rencontrer le groupe de Shawn. Les deux groupes ont travaillé ensemble sur le carton de ce dernier groupe. Vu les imperfections insurmontables de tout diagramme, qui n'est qu'une représentation de la démarche suivie, le diagramme du groupe de Shawn était différent de celui du groupe de Julie. C'était donc plus difficile pour le groupe de Julie de laisser de côté les réponses que Julie et son groupe avaient obtenues sur leur diagramme – où les droites avaient une allure plus parallèle – et de les comparer au diagramme du groupe de Shawn. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la tension réside dans la distinction entre l'objet mathématique et sa représentation.

5. Survol et synthèse générale de l'exemple

Cette série d'extraits, de dialogues et de travaux scolaires donne quelques idées quant aux possibilités et aux limites de la communication chez les élèves de la 7e année. Ces élèves possèdent maintenant un vocabulaire riche. Ils peuvent s'engager dans des dialogues plus poussés et se concentrer sur l'activité mathématique pendant des périodes de temps plus longues qu'aux cycles précédents. En contrepartie, cette facilité à communiquer fait en sorte que l'évaluation de celle-ci peut être un défi, car il y a une variété plus riche d'arguments possibles et de formats de présentation tant à l'écrit qu'à l'oral.

Étant donné que les classes sont encore décloisonnées en 7e année, les habiletés à l'intérieur d'une même salle de classe varient beaucoup. Pour cette raison, la sélection des groupes de travail est une question délicate et difficile. Il n'y a pas de recette miracle. On peut essayer certaines sélections de groupes et les modifier selon les résultats qu'on obtient en cours de route. Dans notre cas, il y avait des groupes homogènes et des groupes hétérogènes. Dans chacun des cas, les élèves ont participé activement; bien que les élèves plus faibles n'aient pas nécessairement eu une part égale dans l'activité discursive, ils ont eu tout de même leur place dans la discussion. Il faut toujours avoir à l'esprit l'idée d'établir une atmosphère d'ouverture et de respect mutuel à l'intérieur de la salle de classe si l'on veut obtenir des résultats optimaux en communication.

Une autre remarque utile à faire concerne les élèves timides. Dans un des cas, un garçon assez timide se trouvait avec deux filles qui étaient fortes de caractère. Il parlait très peu. En utilisant la grille pour évaluer le groupe et les élèves individuellement, on remarque qu'il argumentait très peu, mais qu'il avait une très bonne écoute et qu'il était très attentif. Il a retenu beaucoup de la leçon, même s'il n'a pas discuté autant que les deux filles – il semble même parfois avoir été ignoré par les deux filles. Il est important de saisir cette occasion pour encourager l'élève timide à discuter. Nous devons aussi profiter de la situation pour enseigner aux élèves les règles de la discussion et le respect des autres.

La discussion entre les groupes s'est révélée être une stratégie qui a permis une discussion systématique, ouverte et intéressante en salle de classe. Si on compare ces discussions à celles qui ont eu lieu lors des rencontres entre les groupes de 5e année, on note une nette amélioration. En 7e année, les élèves participent de façon active, tout en considérant les arguments des autres et en apportant les leurs.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant, dans une classe de 7e année, est toujours critique. Les enseignantes et les enseignants doivent être attentifs aux émotions des élèves qui réalisent une tâche en groupe. Il faut aussi être à l'affût des situations où une intervention serait bénéfique. Nous avons remarqué, à plusieurs reprises, que les élèves cherchent l'approbation de l'enseignante ou de l'enseignant pour prouver leur point de vue. Un des rôles de l'enseignante ou de l'enseignant est donc de déterminer si son intervention, à un moment donné, serait plus nuisible que favorable.

Du point de vue conceptuel, il faut remarquer que la géométrie a un vocabulaire complexe qui lui est spécifique. La maîtrise du lexique géométrique ne va pas de soi. Un losange possède une définition précise qu'il faut distinguer de celle du parallélogramme et des autres quadrilatères. Il y a aussi le problème d'utilisation d'un vocabulaire approprié, appliqué dans un mauvais contexte. Par exemple, dans un des groupes, on parlait d'un prisme ou d'une pyramide lorsqu'en fait on ne travaillait qu'avec des figures à deux dimensions.

Mais, sans doute, les deux problèmes cruciaux auxquels se heurtent les élèves du cycle intermédiaire sont les problèmes cognitifs et mathématiques mentionnés au cours de ce chapitre. On a vu comment les élèves ont tendance à se limiter au domaine du perceptif. Ainsi, à la ligne 8 de la section « Rencontre de groupes », Jules-Pierre place les deux règles sur les segments pour apporter une preuve visuelle du parallélisme en question. Il faut un effort soutenu et explicite de la part de l'enseignante ou de l'enseignant pour faire en sorte que les élèves saisissent le mode de fonctionnement du raisonnement mathématique qu'on vise. Comme nous l'avons déjà souligné, l'activité perceptive est un ingrédient de la pensée mathématique. Mais il faut enrichir l'activité perceptive par l'utilisation d'arguments qui, en faisant l'activité perceptive, permettent à l'élève d'atteindre un niveau de généralisation plus élevé. La

preuve du « glissement de la droite » que propose Shawn et qu'utilise Nanette lors de la rencontre de groupes ne peut pas être concluante, comme l'a très bien illustré la remarque de Jules-Pierre (voir Figure 13). On a besoin d'arguments d'un autre type, on a besoin d'arguments qui puissent nous aider à aboutir à des conclusions avec plus de certitude (voir la leçon dans l'annexe, après le chapitre 10; on y trouve une preuve du parallélisme des segments dont il a été question ici).

L'autre problème crucial – le problème mathématique – que nous avons mentionné plus haut a été au centre du débat de la rencontre du groupe de Shawn et de celui de Jules-Pierre. C'est le problème de la distinction entre un objet mathématique et sa représentation. Il ne faut pas confondre l'un et l'autre. Si la représentation coïncidait avec l'objet idéal, les deux groupes auraient eu raison. Un groupe aurait abouti apparemment à un parallélogramme, alors que l'autre non. La distinction à faire est celle-ci : la nature géométrique du quadrilatère générée par la construction ne relève pas des talents en dessin des élèves, mais de la nature logique de la construction. En d'autres mots, on ne déduit pas la nature du quadrilatère en partant des mesures de ses côtés, mais en partant des étapes de sa construction. La mise en œuvre des étapes de construction donne un quadrilatère concret et particulier. Ce dessin particulier ressemblera au parallélogramme selon la précision de la construction réalisée.

Le contenu à enseigner au sujet des figures planes en 7e année n'est pas très étendu, mais il marque une rupture colossale par rapport à ce que les élèves ont appris auparavant. Le concept de construction géométrique soulève en même temps le problème capital de la compréhension du caractère idéal ou abstrait des objets géométriques. Tout se joue dans cette distinction entre l'objet mathématique et sa représentation, distinction qui prend une allure fondamentale en géométrie. Comme Laborde l'indique très clairement,

> il s'agit de faire comprendre aux élèves qu'en géométrie ils doivent s'aider de ce qu'ils voient pour avoir des idées dans la résolution d'un problème de géométrie, mais qu'ils n'ont plus le droit d'utiliser ce qu'ils voient quand il s'agit de raisonner « rigoureusement » et doivent alors se cantonner au niveau théorique[35].

Ce que la leçon que nous avons analysée ici suggère, c'est que la communication s'avère un moyen fondamental pour amener les élèves à discuter de ces différences. Bien sûr, très souvent, les élèves ne pourront pas surmonter eux-mêmes ces différences. On a très bien vu que les élèves n'ont pas pu se sortir de l'impasse dans laquelle ils se trouvaient lors de la rencontre de groupes.

35 C. Laborde. (2003). « Géométrie – Période 2000 et après », dans *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*, Coray *et al.* (dirs.), *L'Enseignement Mathématique*, Monographie no 39, p. 145.

6. Quelques pistes d'intervention

Apprendre à fournir des contre-exemples

Le cycle intermédiaire est propice au développement de stratégies argumentatives telles que le contre-exemple et le raisonnement par l'absurde. L'enseignante ou l'enseignant peut fournir des énoncés mathématiques et demander aux élèves de trouver un contre-exemple ou un raisonnement par l'absurde.

Par exemple, un énoncé pourrait être le suivant : dans un quadrilatère, deux côtés opposés sont parallèles. Peut-on conclure que les deux autres côtés opposés sont parallèles?

Nanette a utilisé cet énoncé dans la section « Considération des arguments », à la ligne 5, où elle fait une généralisation inexacte. Les élèves pourront produire des contre-exemples de l'énoncé précédent (ce qui mène, bien sûr, au concept de trapèze) et s'exercer à ce type d'argument.

Étudier des généralisations de la construction de la bissectrice

Si on a deux cerceaux de rayons différents, la construction fonctionne-t-elle?

Discuter de quelques tests de parallélisme

L'enseignante ou l'enseignant peut présenter dans sa classe la méthode du glissement de Shawn et demander à ses élèves d'en discuter.

Clarifier le but de la rencontre entre groupes

Le groupe de Jean-François a rencontré un autre groupe pour discuter de la feuille d'activité de la première journée. La discussion s'est limitée à une simple vérification de réponses. Les élèves n'ont pas discuté des justifications proposées. L'enseignante ou l'enseignant pourrait s'assurer que les élèves comprennent que les rencontres de groupes visent surtout à échanger les raisonnements et pas seulement les réponses.

Prendre en compte le développement affectif de l'élève

Pour participer fructueusement à l'activité discursive de la salle de classe, l'élève doit se sentir à l'aise. L'enseignante ou l'enseignant doit s'assurer de créer une culture de tolérance, de respect et d'échange d'idées. Dans ce contexte, l'enseignante ou l'enseignant donne l'exemple d'une personne ouverte à l'échange et à la communication, en s'impliquant dans les délibérations des élèves par des questions visant à rendre les arguments plus explicites, en demandant des contre-exemples, en suggérant l'étude de situations qui prolongent ou généralisent les problèmes discutés par les élèves, etc.

Il ne faut pas oublier qu'à cet âge l'élève est dans une situation sociale très vulnérable. L'élève cherche par tous les moyens possibles de se faire ami avec les autres. Souvent, contrairement aux plus petits, l'élève du cycle intermédiaire cherche davantage à plaire à ses pairs qu'à l'enseignante ou à l'enseignant. Il est important de tenir compte de ces aspects affectifs propres à la psychologie de l'adolescent, d'autant plus que cognition et affectivité sont deux processus indissociables : il est impossible de connaître sans ressentir.

7. Pour en savoir plus…

Arsac, G. (1993-1994). *Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie – Vérification et démonstration. Petit x*, n° 37, p. 5-33.

Bkouche, R. (2000). « Quelques remarques autour des cas d'égalité de triangles ». *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, APMEP (France), n° 430, p. 613-629.

Hatfield, M., and G. Bitter. (1991, November). "Communicating Mathematics". *Mathematics Teacher*, 615-622.

Laborde, C. (2003). « Géométrie – Période 2000 et après ». *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie n° 39, 133-154.

Parzysz, B. (1988). *"'Knowing' vs 'Seeing'.* Problems of the plane representation of space geometry figures". *Educational Studies in Mathematics,* 19, 79-92.

Ralston, A., and S. Willoughby. (1997, September). "Realistic problem formulation in problem solving". *The Mathematics Teacher*, 90 (6), 430-433.

Rouche, N. (2000). « Comment repenser l'enseignement de la géométrie ». *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public,* APMEP (France), n° 430, p. 600-612.

Shaw, J. (1993, April). "See it, change it, reason it out". *Arithmetic Teacher*, 434-436.

Shield, M., and K. Swinson. (1996). "The link sheet: A communication aid for clarifying and developing mathematical ideas and processes". In P. Elliott et M. Kenney, *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond*, 1996 Yearbook. p. 35-39. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Chapitre 8

La communication en mathématiques au cycle supérieur

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle supérieur
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle supérieur
4. Un exemple autour de la mathématisation du réel
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication
7. Pour en savoir plus…

1. Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 7, au cycle intermédiaire, le dépassement de la perception et l'importance d'un symbolisme mathématique de plus en plus abstrait marquent en grande partie la nouveauté des apprentissages. La continuité entre le programme-cadre du cycle intermédiaire et celui du cycle supérieur fait en sorte qu'il en va de même au cycle supérieur, mais à un niveau de complexité encore plus grand. Par conséquent, il ne s'agit pas, au cycle supérieur, d'abandonner la perception et le concret, mais d'atteindre des niveaux de raisonnement qui intègrent le concret et le visuel tout en s'appuyant sur les caractéristiques propres des objets mathématiques eux-mêmes.

Il faut avoir présent à l'esprit qu'au cycle supérieur l'élève parvient à un raffinement et à un approfondissement substantiel des concepts clés qui ont commencé à être étudiés au cycle précédent. Par exemple, les fonctions et les représentations graphiques qui ont fait partie du domaine des relations au cycle intermédiaire ainsi que le symbolisme algébrique, introduit peu à peu depuis la 7e année, sont repris au cycle supérieur, mais dans des contextes plus spécialisés (application aux finances, mathématisation du réel, etc.). Au moyen de concepts mathématiques relativement puissants (fonctions logarithmiques, exponentielles, dérivées, etc.), l'élève est amené à bien assimiler le processus de mathématisation du réel.

Or, la mathématisation du réel et l'application des mathématiques à des situations variées (p. ex., au commerce, à la vie de tous les jours) passent par la production de raisonnements et d'arguments mathématiques à un niveau de généralité plus abstrait qu'au cycle intermédiaire. C'est dans ce contexte général que la communication apparaît comme un terrain propice pour arriver à développer, chez les élèves, les habiletés de raisonnement et d'argumentation mathématiques propres au cycle supérieur. Par exemple, la recherche d'arguments mathématiques visant un niveau de certitude plus élevé et l'utilisation critique et réfléchie d'outils technologiques au cours de l'activité discursive seront quelques-uns des objectifs de la communication au cycle supérieur.

Le but de ce chapitre est de déterminer un certain nombre d'objectifs que l'on peut poursuivre en salle de classe en vue de développer la compétence Communication au cycle supérieur, telle qu'elle est décrite dans le *Programme-cadre de mathématiques*. Le chapitre vise également à suggérer quelques repères pédagogiques qui favorisent la communication en salle de classe. Ces points seront abordés dans les deux sections qui suivent. Ensuite, nous donnerons un exemple. Le chapitre se termine par un certain nombre de pistes concrètes d'intervention pédagogique.

2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle supérieur

En continuité avec les objectifs du cycle intermédiaire, à la fin du cycle supérieur, l'élève doit pouvoir :

1. utiliser les conventions mathématiques qui correspondent au cycle supérieur;
2. écouter les propos mathématiques de ses pairs;
3. interpréter les arguments mathématiques de ses pairs;

4. évaluer de façon critique les arguments des autres;
5. exprimer des arguments mathématiques appropriés à la situation mathématique en question en utilisant des concepts et des représentations symboliques convenables;
6. présenter des justifications mathématiques aux arguments qu'il ou elle avance en utilisant, au besoin, la collecte des données et la technologie;
7. améliorer la connaissance de ce qu'est un argument exact, clair et suffisant;
8. organiser avec logique et efficacité la présentation d'un résultat d'une activité mathématique[36].

La section ci-dessous donne quelques pistes concrètes d'actions pédagogiques pour améliorer le développement de la compétence Communication chez l'élève du cycle supérieur.

3. Mise en place et gestion de la communication au cycle supérieur

Quand on vise la compétence Communication, il faut s'assurer, comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, que la communication est considérée tant dans sa dimension orale qu'écrite. On ne peut pas limiter la communication à la production écrite de la solution à un problème. Bien qu'une telle démarche puisse nous renseigner sur certains aspects de la communication (clarté du message, utilisation de symboles mathématiques, etc.), elle ne nous renseigne guère sur l'interprétation que fait l'élève des arguments des autres, de son engagement au dialogue, etc.

Pour s'assurer que les dimensions orale et écrite de la communication sont exploitées de façon convenable en salle de classe, on a intérêt à bien choisir :

– la stratégie pédagogique et
– l'activité mathématique sur laquelle les élèves vont travailler.

Mentionnons certains éléments concernant chacun de ces choix.

Choix de la stratégie pédagogique

Il y a plusieurs stratégies pédagogiques possibles. Une des stratégies que nous prônons, c'est d'avoir recours à une activité pendant laquelle les élèves sont amenés à travailler en petits groupes, puis à échanger avec d'autres groupes ou avec toute la classe. Cette stratégie favorise la production et l'échange d'idées en utilisant la dimension orale et écrite. De façon plus spécifique, on peut penser à une activité de salle de classe qui se base sur les étapes suivantes :

1. Présentation par l'enseignante ou l'enseignant de l'activité mathématique à faire.
2. En petits groupes, travail ayant pour but la discussion et l'obtention de résultats qui doivent être soigneusement justifiés, à l'aide d'arguments mathématiques convaincants.
3. Échange entre les groupes des résultats obtenus et des justifications fournies. Étude des solutions et des arguments fournis par les autres groupes.

36 Au chapitre 2, on trouvera la correspondance exacte entre ces objectifs et les critères de la compétence Communication.

4. Rencontre entre les groupes qui ont échangé leurs solutions, afin de discuter les points forts et les point faibles des solutions et de leurs arguments.
5. Retour au travail en petits groupes pour reformuler les solutions et les arguments mathématiques de façon plus raffinée, en tenant compte de la discussion avec les autres groupes.
6. Discussion des résultats obtenus sous la supervision de l'enseignante ou de l'enseignant.

L'architecture pédagogique suggérée par les six points précédents permet d'atteindre les objectifs de la communication énoncés plus haut. Cette architecture doit être comprise de manière souple, c'est-à-dire qu'elle doit être considérée comme un plan ou un schéma général qui peut donner lieu à des variantes. Par exemple, selon le contenu de la leçon, on peut passer de l'étape 2 à l'étape 4; ou bien, on peut, dans certains cas, éliminer l'étape 4, etc.

À l'étape 1, l'enseignante ou l'enseignant fait la mise en situation. L'étape 2 est très importante, car c'est à ce moment-là que les élèves ont l'occasion de discuter entre eux de problèmes mathématiques spécifiques. Nous suggérons de préparer une feuille d'activité ou de route qui devrait être remplie par chaque élève. Au début de cette étape, l'enseignante ou l'enseignant forme les groupes. Il n'y a pas de règle générale qui permette de connaître les critères à suivre pour aboutir à une formation optimale de groupes. Il y a plusieurs possibilités : on peut former les groupes de sorte à avoir des filles et des garçons dans un groupe (critère du genre); on peut former les groupes selon le niveau de rendement des élèves, etc.

Au cours de nos recherches en salle de classe, nous avons noté que, parfois, des groupes formés exclusivement d'élèves à bas rendement mathématique tendent à travailler sur l'activité mathématique pendant de courtes périodes de temps et que le reste du temps est consacré à d'autres discussions sans rapport à l'activité. Ce phénomène est cependant moins présent au cycle supérieur qu'au cycle intermédiaire. La formation de groupes hétérogènes sur le plan de différent rendement scolaire semble être un bon point de départ. L'enseignante ou l'enseignant devra porter une attention particulière sur l'envergure des discussions générées par le groupe (en qualité et en quantité) et faire des ajustements en cours de route.

Il faut également décider de la taille du groupe. Dans des groupes trop nombreux, le travail tend à être fait par certains membres sans participation importante des autres membres du groupe. La taille du groupe dépend de l'activité. Dans tous les cas, la taille du groupe doit être déterminée en fonction de l'activité que les élèves auront à faire.

L'étape 2 se termine par la production, sur papier, de réponses raisonnées et justifiées de la part des élèves. Puisqu'il s'agit d'un travail en groupe, les élèves arrivent en général à un consensus quant aux réponses et à leurs explications mathématiques. Pour cette raison, les réponses inscrites sur les feuilles d'activité (ou feuilles de route) des élèves d'un même groupe se ressemblent. Mais il se peut (comme cela a été le cas dans la leçon que nous analyserons plus loin) qu'un élève n'arrive pas à être convaincu par les autres membres du groupe. Dans ce cas, les élèves écrivent les deux solutions ou explications en indiquant les différences.

L'étape 3 est consacrée à l'échange de feuilles d'activité entre les groupes. L'enseignante ou l'enseignant a ici à sa disposition plusieurs possibilités. Si le groupe est formé de trois élèves (ce qui est en général un bon nombre), ce groupe produit en tout trois feuilles d'activité relativement similaires. Puisque le groupe doit conserver une des feuilles comme point de comparaison pour évaluer les réponses des autres groupes, cela

signifie qu'il y a deux feuilles qui sont disponibles pour être échangées avec celles des deux autres groupes. On arrive ici à une configuration triangulaire : les groupes G1, G2 et G3 (par exemple) échangent entre eux leurs feuilles (voir Figure 1). C'est cette configuration que nous avons suivie dans la classe à niveaux multiples de 1re et 2e année (voir le chapitre 5).

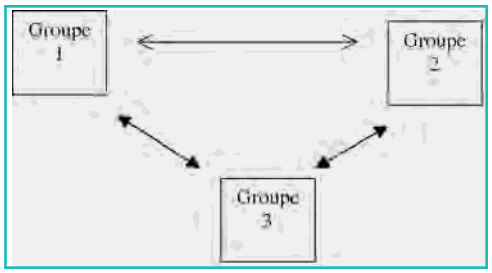


Figure 1. Configuration **triangulaire** qui résulte de l'échange entre trois groupes. Dans cette configuration, les élèves sont amenés à étudier les solutions et les arguments fournis par les deux autres groupes.

Une autre possibilité est de procéder à un échange entre deux groupes seulement. Dans ce cas, deux copies de la feuille d'activité restent dans le groupe et la troisième copie est échangée avec un autre groupe (voir Figure 2). Cette configuration a été utilisée avec les classes de 5e et 7e année (voir les chapitres 6 et 7).

Figure 2. Configuration à deux groupes. Chaque groupe étudie les réponses de son groupe homologue.

L'étape 4 donne l'occasion aux groupes de se rencontrer pour discuter des différences. Cette étape s'avère dans la pratique très intéressante, car les élèves peuvent étudier ou considérer d'autres points de vue et prendre conscience des interprétations que d'autres élèves font de ce qu'ils ont écrit.

L'étape 5 vise à ce que les élèves améliorent leurs arguments et leur raisonnement. Les élèves retournent au travail initial en petits groupes.

L'étape 6 permet de comparer les solutions et les raisonnements de tous les groupes.

Indépendamment de la configuration choisie, la modalité du travail en classe apparaît, dans l'approche pédagogique que nous prônons, comme une série de couches de *zones proximales de développement* (voir le chapitre 3 pour la définition du concept). À chaque étape, en effet, l'élève apprend quelque chose de nouveau par rapport à l'étape précédente.

Il est évident que l'enseignante ou l'enseignant joue un rôle crucial tout le long de ces étapes. Outre la tâche délicate de décider de la formation des groupes, elle ou il doit constamment surveiller le travail des élèves, aller de groupe en groupe, poser des questions pour orienter la discussion dans une certaine direction, donner des conseils, etc. L'enseignante ou l'enseignant joue également un rôle important dans le choix et l'élaboration de l'activité.

Choix de l'activité mathématique

De la même manière qu'il y a des conditions pour promouvoir une organisation adéquate du travail en salle de classe, il y a des conditions à respecter quant au choix de l'activité mathématique. L'activité doit être assez riche et complexe pour justifier le travail en groupe et la discussion.

Dans la pratique, une activité riche qui vise à fournir aux élèves l'occasion d'améliorer la compétence Communication permettra également d'inclure d'autres compétences telles que la compétence « connaissance et compréhension » et la compétence « réflexion, recherche et résolution de problèmes ».

Donc, même si, de prime abord, la mise en place d'une modalité de travail en groupe peut sembler prendre trop de temps, une activité mathématique adéquate accompagnée d'un choix pertinent de travail

en groupes peut faire appel à plusieurs compétences tout en répondant à des attentes et à des contenus d'apprentissage variés.

Dans la section ci-dessous, nous donnons un exemple précis de leçon, tiré de notre recherche en salle de classe.

4. Un exemple autour de la mathématisation du réel

Brève description de la leçon

Le but de cette leçon, élaborée pour une classe de 12e année préuniversitaire, est d'amener les élèves à explorer la communication, l'utilisation de la technologie et les relations entre plusieurs variables, dans un contexte expérimental mettant l'accent sur l'argumentation. L'activité a été conçue pour permettre aux élèves une mathématisation du réel faisant intervenir des fonctions polynomiales et rationnelles, le concept de dérivée et le taux de variation. L'activité s'est déroulée en trois parties.

Dans la première partie, en travaillant en petits groupes, les élèves ont fait, en petits groupes, une analyse qualitative de l'eau s'écoulant d'un récipient en forme de cône (entonnoir). Cette analyse a permis à chaque groupe d'élèves de générer des hypothèses et des arguments quant à la relation graphique entre certaines variables.

Dans la deuxième partie, les élèves ont comparé leurs hypothèses et leurs arguments à ceux formulés par un autre groupe. Cette comparaison leur a permis de raffiner leurs hypothèses.

Dans la troisième partie, les élèves ont fait une expérience en laboratoire et, à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, ils ont procédé à une mathématisation de l'écoulement de l'eau afin de confirmer ou d'infirmer leurs hypothèses. L'activité s'est terminée par une discussion conjointe des hypothèses formulées et de la signification de la mathématisation faite.

La leçon au complet se trouve dans l'annexe, après le chapitre 10. Mentionnons ici rapidement les domaines, les attentes et les contenus d'apprentissage, tirés du programme-cadre de mathématiques.

Domaine : Taux de variation et caractéristiques de courbes.

Attente : Déterminer et interpréter les taux de variation de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

Rubrique : Taux de variation.

Contenus d'apprentissage :

– Poser des problèmes et formuler des hypothèses portant sur des taux de variation dans le domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

– Calculer et interpréter des taux moyens de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.

– Estimer et interpréter des taux instantanés de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.

– Expliquer, en situation et en général, la différence entre des taux moyens de variation et des taux instantanés de variation.

– Tirer des conclusions à partir de différentes représentations d'une situation pour les taux de variation et les comparer aux hypothèses initiales.

Rubrique : Usage du calcul différentiel

– Déterminer, à l'aide des techniques du calcul différentiel, les caractéristiques d'un modèle pour des situations tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

– Comparer les caractéristiques d'un modèle mathématique aux caractéristiques des données qu'il représente.

– Rédiger une question reliée à une situation et y répondre en ayant recours à des modèles mathématiques, à l'aide des techniques du calcul différentiel.

– Communiquer ses résultats de façon claire et précise en intégrant efficacement texte et représentations mathématiques.

Les extraits ci-dessous proviennent de l'enregistrement vidéo de la leçon qui s'est déroulée en trois jours. La première et la troisième journée se sont déroulées dans la salle de classe habituelle. La deuxième journée s'est déroulée dans un laboratoire pour faciliter la partie expérimentale.

Le groupe-classe a été divisé en petits groupes de trois élèves. Nous avons filmé trois groupes (les trois mêmes groupes durant les trois jours de la leçon).

Les extraits que nous allons présenter sont organisés selon les quatre critères proposés dans la grille d'évaluation au début du document (chapitre 2) : l'engagement au dialogue, la considération des arguments, l'organisation de la présentation ainsi que la syntaxe et les symboles. Pour faciliter la compréhension, les extraits sont organisés également de façon chronologique.

Lors de l'étape 1, l'enseignant a expliqué l'activité aux élèves. En utilisant un entonnoir conique rempli d'eau colorée en vert, l'enseignant a attiré l'attention des élèves sur certaines variables qui seraient étudiées par la suite. Alors que le cône se vidait, il a souligné le fait que la hauteur de l'eau qui reste dans le cône change au fur et à mesure que le temps passe. Il a également souligné le fait que le volume d'eau dans l'entonnoir ainsi que le rayon du cercle formé par la surface de l'eau changent aussi en fonction du temps (voir Figure 3).

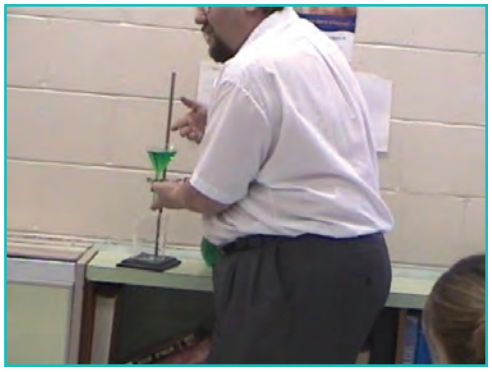


Figure 3. L'enseignant en train d'attirer l'attention des élèves sur les variables à étudier lorsque l'entonnoir en forme de cône se vide à un débit constant.

À l'étape 2, les élèves ont travaillé en petits groupes de trois et ont discuté ensemble afin de déterminer, de façon qualitative, la relation entre la hauteur et le rayon, ainsi que le rayon et le temps, la hauteur et le temps et le volume et le temps. Ils ont ensuite dessiné le graphique de chacune de ces relations.

Engagement au dialogue

L'extrait ci-dessous montre l'engagement au dialogue. Les élèves du groupe 1 discutent de l'allure du graphique de la hauteur en fonction du rayon. Après un moment de réflexion, Édouard dit :

1. ÉDOUARD : OK, oui! Tant que la hauteur diminue, le rayon diminue!

2. SYLVAIN : C'est ça, le rayon diminue en même temps que la hauteur.

3. ÉDOUARD : Je ne sais pas si c'est cons… (*il ne finit pas sa phrase et se met à réfléchir*)

4. SYLVAIN : (*Il continue la phrase d'Édouard et dit :*) Bah!… Ça devrait être constant, oui…

5. DIANE : Bien, c'est uniforme…

6. ÉDOUARD : Donc, ça serait comme une ligne diagonale qui descend? (*Il fait un geste de la main droite; voir Figure 4.*)

7. SYLVAIN : Oui, une droite…

8. DIANE : Oui! Parce que les deux diminuent, donc… (*les élèves se mettent à dessiner*)

9. SYLVAIN : Mais si jamais ce n'est pas au même rythme, ce n'est pas une ligne droite.

10. ÉDOUARD : Bien, oui? (*Sur ces mots, il demande qu'on lui explique encore une fois la question qu'il n'a pas bien entendue, car il dessinait le graphique sur sa feuille.*)

11. SYLVAIN : Si jamais ça ne coule pas au même rythme, ce n'est pas une ligne droite.

12. ÉDOUARD : Mais tant que la hauteur descend… (*ils réfléchissent pendant quelques secondes*)

13. SYLVAIN : (*En rompant le silence, il dit :*) Ouain!

14. DIANE : Oui, je pense que c'est une ligne droite parce que c'est comme…

15. SYLVAIN : Parce que le trou est comme pareil, ça fait que ça descend au même rythme de toute façon.

16. DIANE : Oui!

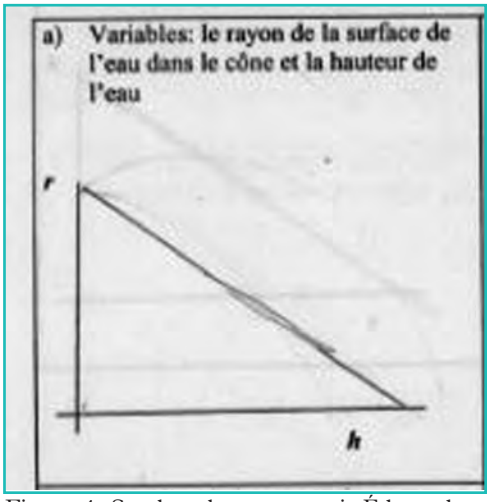


Figure 4. Sur les photos, on voit Édouard en train de faire un geste de la main pour indiquer une ligne droite qui descend. La droite est dessinée comme sur la troisième photo.

Cet extrait montre la façon par laquelle les élèves s'engagent dans une discussion qui aboutit à un premier résultat : le graphique de la relation entre la hauteur et le rayon est, d'après eux, une ligne droite qui descend. Cette idée sera abandonnée par la suite. Ce qui est important de réaliser ici, c'est la contribution de chaque élève à la formation d'une idée. À la ligne 1, Édouard propose une première formulation qui utilise le verbe *diminuer*. Cette formulation s'inspire naturellement de ce que les élèves ont matériellement vu lors de la démonstration faite par l'enseignant : le fait que le rayon et la hauteur ont diminué. À la ligne 2, Sylvain propose une reformulation de l'idée d'Édouard. La reformulation, dans ses propres mots, d'une idée avancée par quelqu'un d'autre est une stratégie discursive souvent utilisée par les élèves. Elle fait partie du répertoire d'objectivation du savoir. Elle est importante en ce sens qu'elle sert à recréer pour soi-même l'idée en question[37]. Il reste à préciser davantage la façon dont les variables diminuent. Édouard montre son hésitation à la ligne 3. Sylvain et Diane proposent une solution aux lignes 4 et 5. Mais, puisque la formulation est encore vague, Édouard la précise davantage en s'appuyant sur les propos de ses pairs. Édouard n'est pas certain; il formule donc cette proposition en émergence sous forme de question (ligne 6). Les gestes montrés à la figure 4 viennent appuyer la production du sens[38]. Ses collègues approuvent l'idée aux lignes 7 et 8. Vient ensuite une question importante soulevée par Sylvain : celle du rythme auquel diminuent les variables. En plus de remettre en question l'idée selon laquelle la relation entre les variables est une droite qui descend, cette remarque soulève une question qui ajoute une tension conceptuelle à la discussion. En parlant de « rythme », la question inclut maintenant la variable temps. On peut donc voir de plusieurs façons les variables « hauteur » et « rayon » : en tant que relation entre elles-mêmes ou en tant que relation que chacune d'elles entretient avec le temps. C'est Sylvain qui propose la solution à la ligne 15.

Comme on peut le constater, ce dialogue est très riche. Il montre non seulement l'engagement des élèves au dialogue, mais la façon dont chacun donne suite aux propos des autres. Du point de vue conceptuel, ce dialogue montre également que la première solution proposée par les élèves trouve son ancrage dans l'activité perceptive : le graphique traduit ce que les élèves ont *vu* lors de la démonstration faite par l'enseignant plutôt que la relation mathématique entre les variables.

Considération des arguments et syntaxe

Les élèves se rendent compte que leur graphique n'est pas bon. C'est Édouard qui s'en rend compte le premier en faisant une interprétation de leur propre graphique. En lisant le graphique le long de l'axe horizontal (où se trouve placée la hauteur), il s'aperçoit que, selon le graphique dessiné, on devrait déduire que, si la hauteur augmente, le rayon diminue.

1. **Édouard :** Mais là, on dit que tant que la hauteur augmente… […] Donc, ça ne serait pas une ligne…
2. **Sylvain :** (*Qui se rend compte de la contradiction, rit et dit :*) Attends une minute!
3. **Diane :** Ça serait, euh… (*les élèves réfléchissent pendant quelques secondes*)

---

37 D'autres exemples sont discutés dans l'article suivant : L. Radford. (2000). "Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis". *Educational Studies in Mathematics*, vol. 42, p. 237-268. Voir en particulier p. 251. Une version en ligne se trouve à cette adresse : http://www.laurentian.ca/educ/lradford/.

38 Dans d'autres travaux, nous avons mis en évidence le rôle que jouent les gestes en tant que producteurs de sens. Voir par exemple L. Radford, S. Demers, J. Guzmán and M. Cerulli. (2003). "Calculators, graphs, gestures, and the production of meaning". In N. Pateman, B. Dougherty and J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME27 –PMENA25), Vol. 4, p. 55-62. Une version en ligne se trouve à cette adresse : http://www.laurentian.ca/educ/lradford/.

4. Édouard : Ça serait de cette façon (*il dessine une droite passant par zéro et ayant une pente positive; voir Figure 5*), parce que tant que la hauteur diminue, le rayon diminue aussi. Si la hauteur augmente, le rayon augmente aussi… comme… donc c'est de cette façon… (*il montre son dessin*)

La discussion continue et Sylvain n'est pas tout à fait convaincu. L'enseignant passe voir le travail du groupe et Sylvain lui fait part de son désaccord.

5. Enseignant : Tu peux écrire pourquoi tu n'es pas d'accord [avec ton groupe]. Mais pourquoi tu n'es pas d'accord, Sylvain? Je t'écoute.

6. Sylvain : (*en se référant au graphique de la figure 5*) Parce que la hauteur augmente, elle ne diminue pas… bien… selon ce graphique-là… Mais le problème, si on le fait dans l'autre sens (*c'est-à-dire si on utilise la droite de la figure 4*), c'est que la hauteur au début est zéro.

7. Édouard : Bien, non! Toi, tu penses que ce n'est pas en fonction du temps. C'est en fonction… (*interrompu par Sylvain*)

8. Sylvain : Ouain, je le sais! (*en se référant à l'expérience*) Mais la hauteur a diminué quand le cône s'est vidé… (*il est interrompu par Édouard*)

9. Édouard : Mais c'est juste un rapport entre deux variables, c'est… ça ne dit pas le progrès de… (*interrompu par Sylvain*)

10. Sylvain : C'est vrai, mais ça ne représente pas la situation. (*Il veut dire la situation concrète telle qu'ils l'ont vue lors de l'expérience.*)

11. Édouard : OK, bien non!

12. Sylvain : C'est ça qu'il faut, il faut représenter la situation! […]

13. Édouard : Bien, oui… ça… je veux dire, si la hauteur était à un certain niveau, le rayon… (*interrompu par Sylvain*)

14. Sylvain : Oui, au début le rayon n'était pas zéro, puis la hauteur [n'était pas] zéro!

15. Édouard : Mais non! (*En signalant avec son crayon le point (0, 0) du système cartésien, il dit :*) Ça, ce n'est pas le début, c'est juste la hauteur quand… à la fin, quand c'est tout parti, la hauteur est zéro puis le rayon est zéro (voir Figure 5).

16. Sylvain : Oui, c'est vrai.

17. Édouard : Oui, comme les valeurs sont bien. Si c'était en fonction du temps, bien là, ça serait différent… (*interrompu par Sylvain*)

18. Sylvain : Oui, OK! Je sais ce que tu veux dire […]

19. Édouard : (*en continuant son explication*) Comme ça (*le graphique de la figure 5*) ne décrit pas le progrès de la réaction.

20. Sylvain : […] Oui, alors je pense que c'est correct […]

21. Édouard : Je comprends, comme… on voit ça (*le graphique de la figure 5*), puis on dit, bien, la hauteur a monté mais je veux dire, c'est juste un rapport entre les deux variables.

22. Sylvain : Oui! (*Petite pause – ils écrivent sur leur feuille.*)

23. Édouard : La hauteur augmente, le rayon augmente.

24. Sylvain : OK!

25. Diane : OK!

On observe ici un phénomène similaire à celui observé dans la classe de 7e année. Il y a une tension entre ce qu'on voit et ce qu'on représente. Il s'agit à nouveau du dépassement du domaine perceptif et de l'inscription de l'expérience mathématique dans un langage symbolique (ici graphique) très complexe. Pour Sylvain, le graphique de la figure 5 soulève un problème clair : un graphique cartésien repose sur une syntaxe d'après laquelle les valeurs que prennent les variables s'organisent selon une certaine direction; cette organisation suggère une lecture qui consiste à considérer les variables des valeurs plus petites aux valeurs plus grandes. En prenant cette convention syntaxique au pied de la lettre, ce graphique dit que la hauteur augmente, alors qu'en réalité elle a diminué au cours de l'expérience (voir ligne 6). L'intervention d'Édouard à la ligne suivante ne permet pas encore de résoudre la situation : c'est ce qu'on apprend en lisant la ligne 8. Ce sont les propos de la ligne 9 qui commencent à rendre la situation plus claire pour Sylvain. La discussion tourne alors autour de ce que représente le graphique et autour de ce qu'on doit représenter. À la fin, un consensus est obtenu. On peut constater l'engagement de tous les membres, chacune des idées entraînant une réflexion et une réaction de chacun des intervenants. Les propos aident chacun à approfondir sa compréhension et son analyse de la situation, et à la représenter selon la syntaxe qui gouverne un système cartésien.

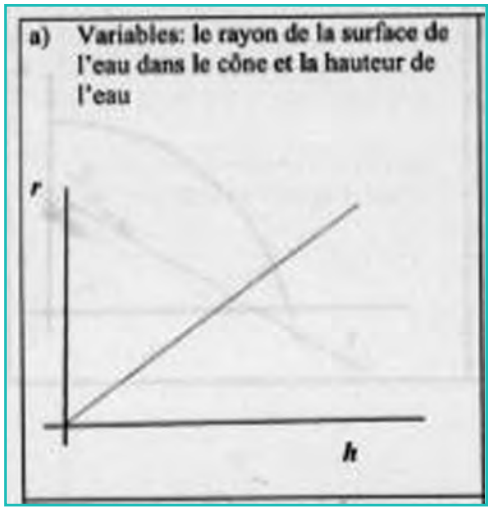


Figure 5. Au haut, le nouveau graphique. Au bas, Édouard montre le point (0,0) du système cartésien et dit que ce point ne représente pas le début de l'expérience (voir ligne 31).

On pourrait dire que le gagnant de cet échange est Sylvain, car il a été amené à raffiner sa compréhension de la représentation mathématique du phénomène. Mais c'est faux. Édouard et Diane ont été constamment amenés à réfléchir sur leurs propres idées après les questions de Sylvain. Ce serait plus juste de dire que les trois élèves ont tiré profit de l'échange d'idées.

Donner suite aux propos des autres : l'intervention de l'enseignant

L'étude de la hauteur et du temps a posé quelques difficultés aux élèves. L'extrait ci-dessous montre comment l'enseignant est intervenu afin de sortir les élèves de l'impasse dans laquelle ils se trouvaient. Les élèves avaient abouti, à tort, à une relation linéaire entre le temps et le rayon; puisqu'ils avaient trouvé une relation linéaire entre le rayon et la hauteur, ils en avaient déduit une relation linéaire entre la hauteur et le temps.

1. **Enseignant :** Ce que tu prédis demain, c'est qu'à chaque intervalle régulier le rayon va changer de la même hauteur… constamment?
2. **Diane :** Oui!
3. **Sylvain :** Oui! […]
4. **Édouard :** Bien, la hauteur à la fin, ça va plus vite, comme…
5. **Enseignant :** Ah bien! Je n'ai pas vu sur le graphique qu'on dise ça. Vous avez fait des lignes droites! (*en s'adressant à Édouard*) Mais tu viens de mettre en jeu un autre concept, puis ça ne va pas avec ton graphique hauteur/temps. Il y a quelque chose qui… il faut que tu considères là… Ce sont de bonnes observations… Veux-tu revoir ton graphique encore une fois?
6. **Sylvain :** Parce que c'est plus petit en bas, ça fait que même si ça (*l'entonnoir*) se vide à la même vitesse, ça (*la hauteur*) descend plus rapidement.

Le terme clé est celui de *changement de hauteur par intervalle régulier de temps*, c'est-à-dire taux de variation. En introduisant dans la discussion le concept de taux de variation, l'enseignant indique aux élèves une piste pour comprendre le phénomène en question. Comme on le verra plus loin, les élèves donnent suite aux propos de l'enseignant. Pour l'instant, ce qui convient de remarquer ici, c'est que l'introduction de ce concept clé, dans la discussion des élèves, correspondait bien à un défi que l'enseignant a relevé avec succès. L'enseignant pouvait attendre et voir si les élèves prenaient conscience du fait que le changement n'est pas constant ou il pouvait suggérer aux élèves cette piste de façon plus ou moins explicite. L'activité était entrée dans sa vingtième minute et il fallait répondre à d'autres questions; de plus, selon les plans de la leçon, les groupes devaient encore échanger leurs réponses, puis se rencontrer pour en discuter. L'enseignant a donc pris la décision de suggérer une piste de réflexion. La suggestion de l'enseignant a porté fruits, et les élèves ont produit les graphiques que l'on trouve à la figure 6.

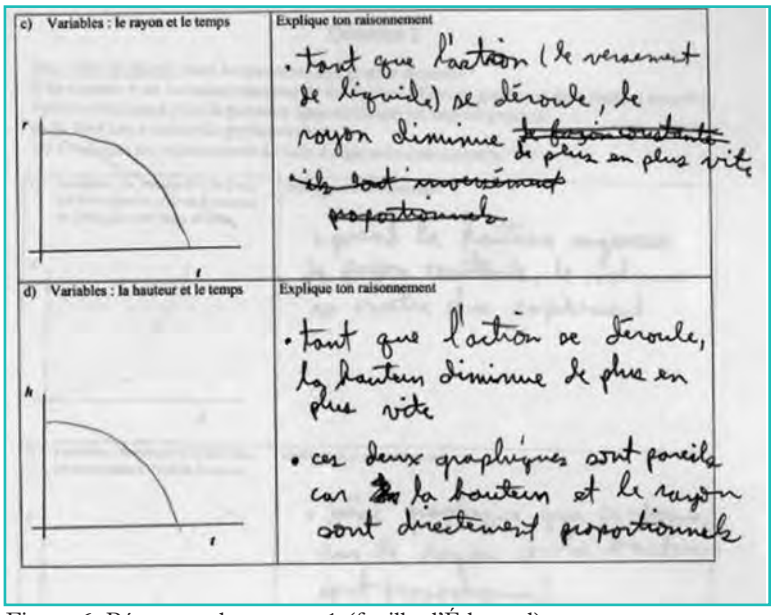


Figure 6. Réponses du groupe 1 (feuille d'Édouard).

L'idée de l'enseignant (celle du taux de variation) est reprise par la suite au moment de l'étude de la relation entre le volume et la hauteur.

7. Édouard : Un certain volume, une certaine hauteur ensuite… le volume diminue, mais est-ce que ça… ? Je ne pense pas que c'est proportionnel.

8. Diane : Non?

9. Édouard : (*Après réflexion, il continue son explication.*) Parce que si tu ajoutes… pour une unité de hauteur (*Il fait un geste du crayon pour indiquer que la hauteur monte; le mouvement du crayon, qui va verticalement du bas vers le haut, simule la hauteur du cône en train de monter; voir Figure 7, photo 1.*) et bien ça augmente assez le volume, comme… il y en a plus et plus qui sont ajoutés chaque fois. (*Il fait un geste des deux mains pour simuler un volume qui augmente; voir Figure 7, photo 2.*)

10. Diane : OK, en comparaison avec… (*interrompue par Édouard qui continue sa réflexion*)

11. Édouard : (*Il parle lentement et, en parlant, il s'adresse tant à lui-même qu'aux autres.*) La hauteur va diminuer, mais… le cercle devient plus grand. Alors le volume devient beaucoup plus grand aussi.

12. Diane : OK! Donc, ça ne serait pas proportionnel?

13. Édouard : Ça serait courbé… tant que la hauteur diminue, le volume diminue aussi, mais le volume va diminuer plus rapidement.

14. Sylvain : Ça ne serait pas droit d'abord?

15. Diane : (*Qui a bien compris l'argument d'Édouard dit :*) Non!

16. Édouard : Uh! (*Édouard prend le crayon et fait une courbe. Il fait d'abord une courbe concave, puis il l'efface et fait une courbe convexe; voir Figure 7, photo 3.*) […]

17. Diane : (*en regardant le graphique*) Oui… mais ça, ça ne veut pas dire que la hauteur a commencé à zéro, puis elle a augmenté?

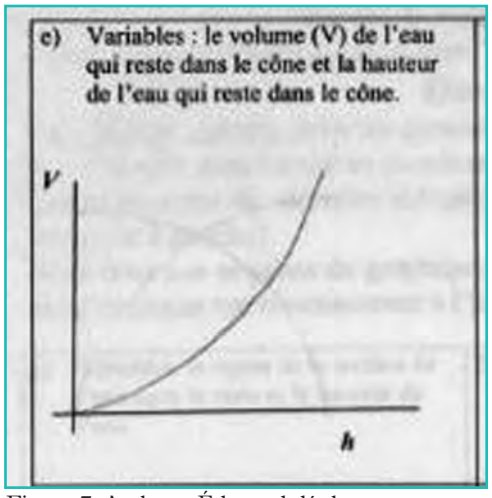


Figure 7. Au haut, Édouard déplace son crayon verticalement pour simuler la hauteur qui augmente; au centre, il fait un geste qui signifie l'augmentation du volume lorsque la hauteur augmente; au bas, le graphique proposé.

18. Édouard : Uh! […]

19. Sylvain : Non, on n'entre pas le temps là-dedans […]

20. Édouard : (*Il fait une synthèse en vérifiant en même temps la validité de l'argument.*) Tu as une hauteur, tu as un volume. Ensuite, tant que ça (*la hauteur*) descend, le volume va diminuer de plus en plus, puis… comme à la fin, tu n'as pas de volume, puis tu n'as pas de hauteur, donc ça va de plus en plus vite vers la fin parce que le volume… (*interrompu par Diane*)

21. Diane : Donc, ça commence là? (*Elle veut dire le point (0, 0).*)

22. Édouard : Uh, hun! Il ne faut pas penser au temps encore, c'est juste… (*interrompu par Diane*)

23. Diane : Oui, OK!

Édouard mène ici une série de réflexions à voix haute. On pourrait dire qu'il s'agit d'énonciations où pensée et langage se recoupent et finissent par former un seul tout. En parlant à voix haute, Édouard peut s'entendre et remettre aux jugements des autres ses propres propos qui sont remis en question (ligne 8), reformulés (ligne 12) et affirmés (ligne 19) par ses pairs.

À l'étape suivante de la leçon, le groupe 1 a échangé ses réponses avec le groupe 3. Les membres du groupe 3 n'ont pas réussi à établir un consensus. Les deux solutions proposées ont été inscrites sur la feuille d'activité. Dans une des solutions, les graphiques concernant les graphiques a) à g) étaient linéaires. Dans l'autre solution, les graphiques c et d étaient des courbes (on disait « parabolique » même si, sur le dessin, le graphique avait une allure plus ou moins hyperbolique; voir Figure 8).

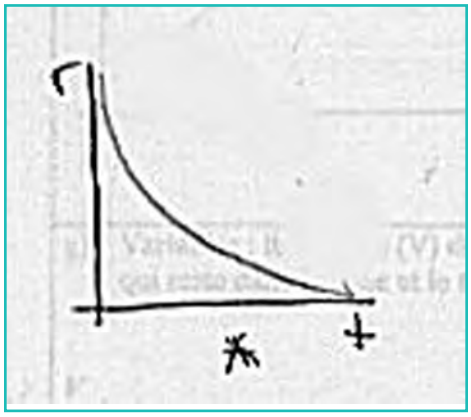


Figure 8. Graphique « parabolique » de la relation rayon/temps proposé par le groupe 3. Un graphique similaire a été proposé pour la relation hauteur/temps.

En lisant les réponses du groupe 3, les élèves du groupe 1 ont donc pris connaissance des deux solutions. Ils ont noté que les réponses a et b étaient similaires, mais que celles aux questions c) et d) ne l'étaient pas. Voici un extrait de leurs réactions aux graphiques c et d.

1. Sylvain : Bien, ça, ce n'est pas ce que nous avons écrit, en tout cas. Comme le graphique…

2. Diane : (*en interprétant le graphique de Nicole*) Bien, c'est parce que ça démontre que… si le rayon… (*interrompue par Édouard*)

3. Édouard : Ça, ça veut dire que le rayon diminue plus lentement.

4. Sylvain : À la fin.

5. Édouard : Ça dit que comme… (*interrompu par Sylvain*)

6. Sylvain : (*En interprétant le caractère asymptotique du rayon lorsque t augmente, il dit :*) Ce n'est pas vrai, parce que [leur graphique dit que] plus le temps augmente… plus lentement le rayon diminue.

7. Édouard : Donc, fais une note de ça.

Diane écrit sur la page de l'autre groupe la note suivante : « Le graphique indique que le rayon diminue plus lentement vers la fin, mais ce n'est pas le cas, sa vitesse augmente ». Et elle ajoute un graphique semblable au leur (voir Figure 6, question c ci-dessus).

Entre-temps, le groupe 3 examinait attentivement les graphiques du groupe 1. Au début, l'interprétation que font les élèves des deux graphiques est que les graphiques expriment la même chose, c'est-à-dire qu'il y a une diminution du rayon au fur et à mesure que le temps s'écoule. Cela est vrai, mais, comme l'enseignant le suggère, cette diminution n'est pas exprimée de la même façon sur chaque graphique. Voici un extrait du dialogue :

1. **Tanya :** (*Elle voit la feuille du groupe 1 et dit :*) Le rayon diminue à mesure que le temps augmente, et nous autres on avait ça (*elle voit la feuille de son groupe*)… le rayon diminue, à mesure que le temps augmente […]
2. **Robert :** C'est ça. Dans les deux cas, ça dit la même chose […]
3. **Tanya :** Les deux [graphiques]… les deux [graphiques] disent la même chose.
4. **Nicole :** (*en lisant l'explication du groupe 1*) Ils ont exactement le même raisonnement que nous, mais, eux, ils ont ça (*elle indique le graphique du groupe 1*), puis nous autres, on a ça. (*elle indique le graphique du groupe 3*) Mais quand tu y penses, ça donne vraiment [la même chose]…
5. **Enseignant :** Mais il y a une différence dans les deux! (*interrompu par Robert*)
6. **Robert :** Oui! Il y a une différence. Il y en a un qui est concave vers le haut puis un vers le bas. C'est ça la différence! […]
7. **Enseignant :** Je sais que le rayon diminue à mesure que le temps augmente, mais de quelle façon diminue-t-il?
8. **Nicole :** Avec un rythme… qu'on n'a pas calculé donc… (*interrompue par Robert*)
9. **Robert :** Ah, il y en a un qui est plus rapide que l'autre, non?
10. **Enseignant :** Bien… ça peut-être ça…!

Les élèves du groupe 3 continuent à discuter des différences sans arriver vraiment à pouvoir les saisir. L'enseignant n'a pas fourni d'aide plus précise. Sachant que les groupes allaient se rencontrer quelques minutes plus tard, il a préféré laisser la suite de la discussion pour plus tard et voir si le groupe 1 arriverait à convaincre le groupe 3.

Comme il a été prévu, la leçon a continué avec la rencontre des groupes. Le groupe 1 se déplace pour aller rencontrer le groupe 3.

1. **Nicole :** OK, moi, je dis qu'il ne peut pas aller plus vite parce que le trou est pareil, il ne change pas, il peut seulement laisser un *montant* (une quantité) de volume passer. (*en parlant, elle montre le trou de l'entonnoir; voir Figure 9, photo 1*) C'est le même volume tout le temps, donc la vitesse n'augmente pas. Parce que le trou ne peut pas laisser passer plus… la vitesse du liquide qui passe par le trou… […]

2. Édouard : (*Après une pause de réflexion, il dit :*) Le temps se déroule, qu'est-ce qui arrive au rayon?

3. Nicole : (*en répondant rapidement*) Le rayon diminue.

4. Robert : Le rayon, oui le rayon diminue…

5. Édouard : OK, on sait ça, mais est-ce que ça diminue de façon… constante ou…?

6. Robert : Mais… si ça (*le liquide*) sort de façon constante, il faut que… (*Il réfléchit; ensuite il considère de façon hypothétique l'autre possibilité et dit :*) Si ça sort plus vite, le rayon va diminuer plus rapidement, ça prend moins de temps!

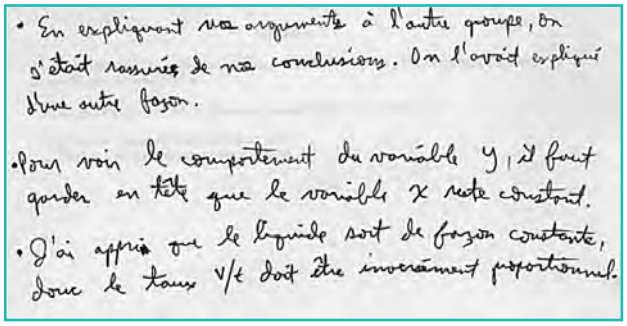
7. Sylvain : (*Il intervient en montrant sur l'entonnoir le volume de l'eau.*) Le volume diminue au même rythme, mais s'il y a beaucoup moins d'espace… (*voir Figure 9, photo 2*) Parce que le volume sort toujours au même rythme, mais en bas, ici (*il montre la partie basse du cône*), il y a moins de volume…

8. Nicole : Donc, eux autres ont raison… Ils ont raison ici… (*longue pause pendant que les élèves du groupe 3 réfléchissent*)

Figure 9. Au haut, Nicole montre le trou en expliquant que le volume sort à un débit constant. Au centre, Sylvain attire l'attention sur le volume d'eau en indiquant la forme du volume à la fin du cône. Au bas, les élèves mettent de l'eau dans le cône et observent le phénomène pour vérifier leurs conclusions.

Les effets de la rencontre de groupes sur l'apprentissage des élèves

Après l'échange, les groupes ont regagné leur place. Après l'analyse des réponses fournies par l'autre groupe et après la discussion, chaque élève pouvait réécrire les arguments et les idées afin d'améliorer les arguments avancés précédemment.



• En expliquant nos arguments à l'autre groupe, on s'était rassurés de nos conclusions. On l'avait expliqué d'une autre façon.

• Pour voir le comportement du variable y, il faut garder en tête que le variable x reste constant.

• J'ai appris que le liquide sort de façon constante, donc le taux v/t doit être invariement proportionnel.

Figure 10. Commentaires et réélaboration des arguments d'Édouard après la rencontre de groupes.

Tous les groupes ont trouvé la discussion profitable. Les raisons varient. Édouard en donne trois. Les voici :

La première raison a trait au fait que, en ayant l'occasion d'expliquer ses raisonnements à l'autre groupe, il prend davantage d'assurance dans les arguments qu'il avance.

La troisième raison semble être aussi bonne que celles qu'il avait déjà données précédemment. Il avait en effet donné comme argument, en expliquant la relation entre le volume et le temps, relation qu'il avait dessinée comme une droite à pente négative (similaire en allure à la droite montrée dans la figure 4 ci-dessus) : qu'« à mesure que le temps avance, le volume diminue de façon inversement proportionnelle. Le liquide sort de façon constante[39] ».

Il y a néanmoins une différence importante. La distinction entre cause et effet est mieux formulée dans l'argumentation après la rencontre de groupes. En effet, dans la troisième argumentation, ce n'est pas clair si c'est ce qu'il appelle le caractère « inversement proportionnel » qui explique le fait que le liquide sort de façon constante ou l'inverse. Dans la deuxième argumentation, la distinction est faite de manière explicite.

La deuxième raison reflète encore la dimension purement physique de l'expérience et les hypothèses qu'on fait lorsqu'on la conceptualise. La deuxième raison se rapporte à l'idée d'une progression de l'expérience dans le temps et l'idéalité qui sous-tend la mathématisation faite. Cette raison vient empêcher des actions « externes » qui feraient aller l'écoulement de l'entonnoir parfois plus vite, parfois moins vite, etc. Cette raison apparaît liée à l'échange avec l'autre groupe et, en particulier, avec Nicole. Elle réapparaît dans la deuxième argumentation produite par Diane qui, en plus de se sentir plus à l'aise avec les arguments qu'elle et son groupe avaient proposés dans un premier temps, avoue que, « malgré nos discussions, la question concernant le volume et le temps reste toujours un peu floue ». En fait, ce qui reste flou, c'est l'explicitation des conditions idéales qui sous-tendent toute mathématisation du réel. Sylvain, qui apporte toujours une dimension pratique aux discussions, écrit : « En expliquant nos arguments à l'autre groupe, on a gagné de la confiance dans nos arguments. Et puis, le liquide sort toujours au même rythme. Tout se base sur ce point. »

Le fruit de l'échange entre les groupes se voit également dans la réélaboration des arguments donnés par Robert, l'élève du groupe 3.

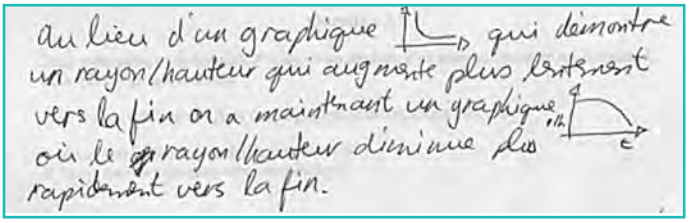

au lieu d'un graphique qui démontre un rayon/hauteur qui augmente plus le temps vers la fin on a maintenant un graphique où le rayon/hauteur diminue plus rapidement vers la fin.

Figure 11. Extrait des commentaires et de la réélaboration des arguments de Robert après la rencontre de groupes.

5. Survol et synthèse générale de l'exemple

Dans ce chapitre, nous avons suggéré quelques objectifs à cibler pour développer, chez les élèves du secondaire, la compétence Communication. Nous avons mentionné l'importance de bien choisir l'activité et la stratégie pédagogique. À cet effet, nous avons proposé quelques jalons qui ont été illustrés à l'aide d'une leçon portant sur le domaine « Taux de variation et caractéristiques de courbes » et sur certains contenus d'apprentissage tels que la formulation de problèmes et d'hypothèses portant sur le taux de variation. Bien que la leçon se soit étalée sur trois jours, pour des questions d'espace, nous nous sommes limités ici à présenter quelques faits saillants de la première journée.

39 Pour indiquer un taux de variation qui diminue, les élèves utilisent, à tort, l'expression *inversement proportionnel*.

En repensant à la première journée de l'activité, la question que l'on doit se poser est la suivante : En ce qui a trait à la communication et à l'apprentissage, qu'est-ce que les élèves sont parvenus à faire et qu'ils n'auraient pas pu faire si, à la place d'une leçon comme celle-ci, ils avaient suivi un enseignement de type magistral classique?

On peut imaginer la situation traditionnelle dans laquelle l'enseignant formule le problème et dessine lui-même le graphique des relations entre les variables en faisant noter au besoin que le taux de variation augmente ou diminue, etc. Les élèves auraient peut-être suivi la construction des graphiques et les explications, mais ils n'auraient pas eu l'occasion de formuler des hypothèses et de les défendre auprès d'autres élèves. Ils n'auraient pas eu l'occasion d'écouter d'autres types d'arguments qui visent à expliquer un phénomène naturel, de les confronter aux leurs et de contre-argumenter. Ils n'auraient pas eu la possibilité de prendre conscience, comme ils ont pu le faire ici, que le concept de taux de variation est au centre de l'étude de maints phénomènes et que son application repose sur certaines hypothèses qui définissent une situation idéale. Bref, que l'application des mathématiques au réel passe par l'adoption d'un certain nombre de conditions qui font référence à une situation et à un objet idéaux.

L'échange à l'intérieur d'un même groupe puis entre groupes s'est avéré un moment discursif important dans la prise de conscience de la description mathématique de la relation entre les variables à l'étude. On a pu voir comment les conceptualisations étaient présentées, mises à l'étude et même abandonnées dans un processus de raffinement progressif. Le problème cognitif central, à savoir le dépassement du perceptif et l'agencement d'un espace plus grand occupé par un raisonnement basé sur des symboles abstraits – dépassement qui, comme nous l'avons indiqué précédemment, marque une rupture importante par rapport au cycle intermédiaire –, se pose ici à un niveau encore plus complexe. Les premiers graphiques produits par les élèves tentent, en effet, de réconcilier l'aspect perceptif et physique de l'expérience (un niveau d'eau qui diminue) avec les symboles mathématiques (une droite qui descend). Mais les symboles mathématiques, à partir desquels s'exprime et s'objective la pensée, ont une syntaxe propre qu'il faut apprendre à respecter. La façon dont fonctionne un graphique cartésien est loin d'être évidente pour les élèves. On a intérêt à se rappeler ici les difficultés qu'avaient les enfants du jardin et du cycle primaire (chapitres 4 et 5) à comprendre la syntaxe d'un tableau. La situation des élèves du cycle supérieur n'est pas très différente. En étudiant la relation entre la hauteur et le rayon, il faut, comme l'ont mentionné les élèves à plusieurs reprises, ne pas « voir » ou « penser » l'expérience dans sa relation au temps. Il s'agit alors d'exprimer une expérience mathématique à un niveau d'abstraction relativement élevé.

On peut formuler ce problème qui a trait à l'acquisition de la syntaxe mathématique de la façon suivante : l'expérience concrète (ici l'écoulement du liquide dans un entonnoir) se déroule dans le temps et dans l'espace. Elle s'objective (c'est-à-dire, elle devient objet de conscience pour l'élève) à partir de ce que l'élève voit et de l'interprétation de ce que lui donnent les sens à l'aide des catégories conceptuelles inscrites dans la langue (p. ex., « plus vite », « diminution »). Il s'établit ainsi, entre l'élève et l'objet d'étude, ce que nous avons appelé ailleurs une *relation de signification située et contextuelle*[40]. Nous voulons dire par là que l'élève, au moyen de l'activité perceptive, de la langue et des gestes, prend conscience d'un

[40] L. Radford, S. Demers, J. Guzmán and M. Cerulli. (2004). "The sensual and the conceptual: artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. Calculators, graphs, gestures, and the production of meaning". In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME28). Bergen University College Faculty of Education, Norway. Une version en ligne se trouve à l'adresse suivante : http://www.laurentian.ca/educ/lradford/.

phénomène et que cette prise de conscience se fait dans une certaine perspective. Or, la mathématisation du réel se fait dans un langage qui exige un changement de perspective (p. ex., en étudiant la relation entre la hauteur et le rayon, on doit faire comme si le temps n'intervenait pas). La mathématisation exige l'adoption d'autres perspectives. Elle exige l'abandon de la signification située et contextuelle. Ce problème s'est posé aux élèves la deuxième journée. La mathématisation qu'ils faisaient portait-elle sur un cône en particulier ou était-elle valable pour tous les entonnoirs de forme conique? C'est de l'abandon de la signification située et contextuelle que va émerger l'objectivité du discours scientifique et mathématique qui, lui, exige une description du phénomène indépendamment de sa situation et de son contexte. Voilà un des défis majeurs des apprentissages mathématiques du cycle supérieur!

Revenons à l'expérience en salle de classe et arrêtons-nous un instant sur le rôle de l'enseignant. On a vu le rôle important joué par l'enseignant au cours du processus de raffinement des arguments des élèves. Comme nous l'avons indiqué à la fin du chapitre 3, il ne faut pas croire que l'enseignant n'entre en jeu dans la production du savoir des élèves qu'à l'occasion d'interventions verbales avec ces derniers. En effet, il ne faut pas oublier que l'enseignant est omniprésent, du début à la fin de la leçon, car son ombre apparaît dans chacune des questions posées pendant l'activité. Mais une fois la leçon commencée, on ne peut pas prédire la tournure. Tout dépend des interprétations que font les élèves des questions posées, des arguments que les élèves développent, etc. Même une leçon planifiée minutieusement n'est pas à l'abri des imprévus. C'est ici que l'enseignante ou l'enseignant doit faire des choix rapides et judicieux. Le problème, bien sûr, c'est qu'il n'y a pas de formule magique. Nous avons vu que l'enseignant, en discutant avec le groupe 1, a amené les élèves à tenir compte, dans leur raisonnement, du concept du taux de variation. Il a été moins explicite lorsqu'il est allé discuter avec les élèves du groupe 3. Pourquoi? L'enseignant savait que le groupe 3 allait rencontrer le groupe 1 (le choix des groupes qui allaient se rencontrer avait été décidé avant la leçon). Donc, même si le groupe 3 n'arrivait pas à produire des raisonnements et des graphiques acceptables du point de vue mathématique, les élèves de ce groupe allaient pouvoir prendre conscience de ces raisonnements en discutant avec le groupe 1. Voilà un choix subtil! Dans l'enregistrement vidéo de la leçon, on peut voir l'enseignant surveiller de près la discussion de la rencontre entre les groupes 1 et 3. Peut-être que si les groupes n'étaient pas parvenus à une entente, serait-il intervenu? Quoi qu'il en soit, une leçon qui vise à développer la compétence Communication exige une surveillance continuelle de la part de l'enseignante ou de l'enseignant et l'exécution sur-le-champ de choix souvent difficiles.

6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication

Apprendre à comprendre l'argument de quelqu'un d'autre

Même au cycle supérieur, les élèves n'écoutent pas forcément attentivement les arguments des autres. L'enseignant qui note que cela est le cas entre deux élèves, disons A et B, peut demander à l'élève A de reformuler l'argument de l'élève B et vice-versa. Cela permet aux élèves de comprendre les formulations qu'ils essaient de réfuter.

Apprendre à réfuter l'argument de l'autre

Lors de la rencontre des groupes, Nicole a commencé par exprimer un argument d'une façon nette. Son argument allait à l'encontre des résultats obtenus par l'autre groupe. Elle a dit :

> OK, moi, je dis qu'il ne peut pas aller plus vite parce que le trou est pareil, il ne change pas, il peut seulement laisser un *montant* (une quantité) de volume passer. (*en parlant, elle montre le trou de l'entonnoir*) C'est le même volume tout le temps, donc la vitesse n'augmente pas. Parce que le trou ne peut pas laisser passer plus… la vitesse du liquide qui passe par le trou… […]

C'est Édouard qui a pris la parole. Mais il n'a pas réfuté l'argument de Nicole. Il a proposé un *autre* argument et a fait de son mieux pour montrer que celui-ci était bon, sinon meilleur que l'autre. Il a dit : « Le temps se déroule, qu'est-ce qui arrive au rayon? » On voit sa stratégie discursive : en attirant l'attention sur le rayon, il ne parle pas du trou et du volume qui passe par cet orifice, etc. Même si son argument finit par convaincre les membres du groupe 3, on pourrait demander à Édouard d'expliquer pourquoi le raisonnement de Nicole n'est pas exact.

Amener l'élève à rendre explicite son opposition

La ligne 5 de la section « Considération des arguments et syntaxe » fournit un exemple concret de la façon dont l'enseignant peut encourager les élèves à s'exprimer en détail. Dans l'intervention mentionnée, l'enseignant a dit :

> « (…) tu peux écrire pourquoi tu n'es pas d'accord [avec ton groupe]. Mais pourquoi que tu n'es pas d'accord, Sylvain? Je t'écoute. »

Voilà une belle façon de faire pour que Sylvain justifie son désaccord!

Utiliser les symboles mathématiques et les objets d'expérimentation pour réfuter un argument

On a constaté que, lors de la rencontre de groupes, les élèves utilisaient peu les graphiques qu'ils voulaient réfuter. On pourrait demander à un groupe d'interpréter le graphique de l'autre groupe en se servant de l'entonnoir. Par exemple, l'enseignante ou l'enseignant peut dire : « Si ce graphique était bon, qu'est-ce qu'il voudrait dire au sujet de la variation du volume (ou de la hauteur, etc.) par rapport au temps? » Il pourrait alors demander qu'on montre sur l'entonnoir la signification du graphique sur les variables en discussion.

Surveiller les discussions

L'enseignante ou l'enseignant doit être vigilant dans ses interventions et doit s'assurer que les élèves discutent librement de mathématiques en l'absence de supervision. Même au cycle supérieur, certains élèves ont tendance à s'éloigner du sujet en parlant notamment d'activités sociales, parascolaires, etc.

Motivation et engagement de l'élève

La motivation et l'engagement de l'élève sont primordiaux pour la réussite d'activités comme celle traitée dans ce chapitre. Au cycle supérieur, l'élève a atteint une certaine maturité intellectuelle. Il est donc plus libre de prendre des décisions le concernant. Et il est d'autant plus à l'aise de participer aux activités que sa contribution est reconnue par le groupe et par l'enseignante ou l'enseignant.

Moyens d'amélioration de l'activité

On pourrait peut-être incorporer une variété de tailles d'entonnoir. On pourrait également envisager l'utilisation des CBR pour déterminer le niveau d'eau. On pourrait même aller jusqu'à une simulation de l'expérience par ordinateur.

7. Pour en savoir plus...

Balacheff, N. (1987). « Processus de preuve et situations de validation ». *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Dreyfus, T., and T. Eisenberg. (1990). "Conceptual calculus: fact or fiction?" *Teaching Mathematics and its Applications*, 9 (2), 63-67.

Grootenboer, P. (2002). "Kids talking about their learning in mathematics". *APMC*, 7 (4), 16-21.

Lavigne, N., and S. Lajoie. (1996, January). "Communicating performance criteria to students through technology". *The Mathematics Teacher*, 89 (1), 66-68.

Sfard, A., P. Nesher, L. Streefland, P. Cobb and J. Mason. (1998, February). "Learning Mathematics through conversation: is it as good as they say?". *For the Learning of Mathematics*, 41-51.

Chapitre 9

L'évaluation de la compétence en communication en mathématiques

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Le besoin d'un outil d'évaluation
   – L'outil
   – La méthodologie
3. Un exemple
4. Pour en savoir plus…

1. Introduction

Aux chapitres précédents, nous avons discuté des fondements conceptuels de la communication en mathématiques et élaboré une grille d'évaluation qui correspond aux attentes du programme-cadre de mathématiques de l'Ontario. De plus, nous avons présenté des stratégies pédagogiques concrètes dont le but est de favoriser la communication sous différents aspects : collaboration avec les pairs en situation de résolution de problèmes, argumentation mathématique, analyse critique de raisonnements, etc. Nous avons illustré ces stratégies à l'aide d'exemples tirés de la salle de classe. Il nous reste maintenant à aborder le problème de l'évaluation de la communication. Le but de ce chapitre est précisément de présenter un outil concret permettant d'évaluer chez l'élève la maîtrise de la compétence Communication.

Puisque nous ne limitons pas la communication à sa dimension écrite et que, au contraire, nous considérons qu'une grande partie des apprentissages relève de la dimension orale, il nous faut un outil capable de rendre compte non seulement de la dimension écrite, mais aussi de la dimension orale ou discursive. La section 2 porte sur les difficultés propres à évaluer la communication. Elle porte aussi sur le besoin d'un outil d'évaluation et de son utilisation en salle de classe. La section 3 présente une échelle d'évaluation basée sur les critères de maîtrise de la compétence Communication mentionnés au chapitre 2. La section 3 donne un exemple concret d'utilisation de l'outil dans une classe de 7e année.

2. Le besoin d'un outil d'évaluation

Une des caractéristiques des classes mathématiques non traditionnelles est que, dans celles-ci, en opposition aux classes traditionnelles basées sur un enseignement magistral, on offre la possibilité aux élèves de chercher des solutions dans le travail en petits groupes, la discussion, la comparaison de stratégies de solutions, etc.[41] Or, la complexité et le volume des échanges produits dans une situation discursive où les élèves travaillent en petits groupes rendent difficile la tâche d'évaluation de la communication. Une des grandes difficultés réside dans le fait qu'on ne peut pas revenir sur un dialogue comme on peut revenir sur un texte écrit. L'activité discursive se déploie en temps réel. Des énoncés sont produits, des répliques s'ensuivent, des propos sont reformulés sans que tout cela reste inscrit dans une forme durable comme pour la langue écrite. Tout le long de notre recherche, nous avons pu profiter des enregistrements vidéo faits en salle de classe. Les enregistrements nous ont permis de revenir sur l'activité et les discussions des élèves et d'en ressortir les moments clés sur le plan de la communication. Il est tout à fait évident qu'une enseignante ou un enseignant ne peut pas procéder de la même façon dans sa démarche quotidienne d'enseignement. Il faut alors penser à un autre moyen.

L'outil d'évaluation que nous avons conçu et la stratégie d'utilisation qui l'accompagne sont présentés ci-dessous. Nous commencerons par le problème de l'échelle de rendement.

---

41 Voir T. Wood and B. McNeal. (2003). "Complexity in teaching children's mathematical thinking". In N. A. Pateman, B. Dougherty and L. Zilliox, *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (PME 27 et PMENA 25), Vol. 4, p. 435- 441, University of Hawaii.

L'OUTIL

L'outil que nous proposons permet à l'enseignante ou à l'enseignant de situer le niveau de rendement de l'élève dans sa maîtrise de la compétence en communication par des critères mentionnés à la fin du chapitre 2, où la grille de rendement a été présentée. Rappelons ici les critères retenus :

1. syntaxe et symboles;
2. organisation de la présentation;
3. engagement au dialogue;
4. considération des arguments des autres.

On se rappelle que chaque critère possède certains descripteurs. Dans la terminologie du programme-cadre de mathématiques, un descripteur est ce qui permet de faire une description qualitative de la maîtrise d'une compétence. D'après notre grille, le critère « syntaxe et symboles » possède les descripteurs **clarté** et **exactitude**.

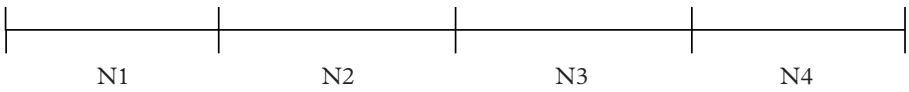
Un descripteur, comme l'exactitude, permet de parler du rendement relativement à des niveaux : un niveau élevé correspond à une maîtrise élevée de l'utilisation de la syntaxe et des symboles.

L'idée de base de l'outil d'évaluation est de ne pas tout évaluer en même temps, mais de choisir quelques-uns des critères et quelques-uns des descripteurs. À un autre moment, on peut prendre d'autres critères ou d'autres descripteurs[42].

Dans un premier temps, et en guise de simplification, nous suggérons de regrouper les critères 3 et 4 en un seul critère. Pour ce critère combiné, on peut choisir, par exemple, les descripteurs suivants : « pertinence et efficacité ». Supposons que nous voulons limiter notre évaluation à ce critère combiné.

Le critère et les descripteurs étant choisis, arrêtons-nous maintenant aux niveaux de rendement. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le programme-cadre divise le rendement en quatre niveaux. L'outil d'évaluation peut être représenté comme suit :

Nom de l'élève :



Critère : Engagement au dialogue/Considération des arguments des autres.

Descripteurs : Pertinence et efficacité.

Niveau : Défini selon la pertinence et l'efficacité des arguments.

42 Évidemment, ce principe s'applique à toute compétence et non seulement à celle de la communication.

Si l'enseignante ou l'enseignant décide que l'évaluation porte sur deux critères, l'outil aura la forme que voici :

Nom de l'élève :

	N1	N2	N3	N4
Critère :				
Critère :				

L'outil d'évaluation est conçu de façon à permettre à l'enseignante ou à l'enseignant d'observer l'élève et de noter sa performance en marquant, à l'aide de traits, le niveau correspondant.

Dans la section ci-dessous, nous donnons plus de précisions en ce qui concerne la méthodologie.

LA MÉTHODOLOGIE

Parmi les stratégies possibles, on peut :

– cibler un élève pour une période de temps ou

– cibler un petit groupe pour une période de temps.

Au lieu de se limiter à observer un élève (ou un groupe d'élèves), on peut également se permettre d'intervenir dans la discussion du groupe afin d'obtenir des renseignements supplémentaires sur la maîtrise des critères visés.

Continuons avec notre exemple. Supposons qu'on décide d'évaluer le critère combiné mentionné plus haut. Un des éléments auxquels on s'intéresse est celui de savoir jusqu'à quel point un élève donne suite aux arguments des autres. Dans ce contexte, l'enseignante ou l'enseignant peut demander à l'élève évalué de réagir à une idée qui vient d'être exprimée. L'enseignante ou l'enseignant peut poser des questions comme :

– Penses-tu que ce que Chantal a dit est vrai? Explique-nous!

– Penses-tu que cela reste vrai dans tous les cas? Explique-nous!

– Penses-tu que cela est vrai même si le triangle n'est pas isocèle? Nous écoutons tes arguments!

Chez les jeunes élèves, où savoir écouter ne va pas de soi, l'enseignante ou l'enseignant peut poser des questions comme celles-ci :

– Peux-tu formuler, dans tes propres mots, l'idée que Chantal vient d'exprimer?

– Peux-tu répéter ce que Chantal a dit?

Si c'est le groupe qui est évalué, à la place de « Penses-tu que… » on utiliserait « Pensez-vous que… ».

Dans les deux cas envisagés précédemment (celui où l'enseignante ou l'enseignant reste en tant qu'observateur ou celui où elle ou il intervient dans la discussion), il est essentiel que l'élève ou le groupe d'élèves qui sera évalué soit prévenu. On doit lui indiquer les critères qui seront visés et ce qu'on attend de lui quant à la performance.

Une enseignante ou un enseignant qui souhaite évaluer un groupe plutôt qu'un élève peut suivre la même démarche décrite ci-dessus. Par exemple, pendant une certaine période de temps, l'enseignante ou l'enseignant peut évaluer l'argumentation mathématique du groupe en se concentrant sur un critère choisi; ensuite, elle ou il peut passer à un autre critère, etc. Étant donné que l'on prend en compte le groupe au complet et non pas un seul individu, une évaluation de ce genre prendra nécessairement plus de temps.

En décidant du temps que l'on va passer à observer un groupe ou un élève, il faudra tenir compte du fait que, chez les élèves les plus jeunes, les longues discussions mathématiques sont difficiles à soutenir. On devra donc choisir soigneusement le type d'observation (élève ou groupe) selon l'âge des élèves et l'activité choisie.

Il faut garder à l'esprit qu'il est difficile de repérer et d'évaluer chaque intervention faite par un élève dans une discussion. Il est parfois difficile de déterminer où commence et où se termine une intervention. L'idée n'est pas de mettre une étiquette sur chacune de ces interventions, mais de se munir des moyens qui permettent de fixer le niveau de maîtrise des critères de communication chez l'élève.

3. Un exemple

Il est beaucoup plus facile de comprendre l'utilité d'un tel outil au moyen d'un exemple concret. L'extrait qui suit provient d'une discussion entamée par quatre élèves de la 7e année lors d'une leçon de géométrie portant sur les médiatrices (voir le chapitre 7). Nous utiliserons un bloc d'une trentaine d'interventions, qui a duré près de trois minutes. La discussion tourne autour de la rédaction d'un texte expliquant les étapes à suivre pour construire la médiatrice d'un segment. On se rappellera que la construction de la médiatrice se fait à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, et que le texte ainsi produit est analysé de façon critique par un autre groupe.

Dans un premier temps, nous allons nous centrer sur l'élève Steven et sur le critère combiné suivant : « engagement au dialogue et considération des arguments ou des propos des autres ». Nous centrerons l'évaluation sur les descripteurs que voici : pertinence et efficacité. Après, nous étudierons le texte écrit pour évaluer les autres critères de la compétence Communication.

Engagement au dialogue et considération des arguments ou des propos des autres

Pour compenser en quelque sorte la richesse de l'information à laquelle on a accès lorsqu'on voit ce que font les élèves, nous indiquerons, entre parenthèses, quelques renseignements qui peuvent être utiles pour comprendre la discussion.

1. **Norma** : … Mets la pointe du compas sur le segment B. Non. Qu'est-ce que eux ont écrit? *(Elle va voir sur le questionnaire remis le jour précédent pour trouver la terminologie appropriée.)* Place la pointe de ton compas sur…
2. **Pascale :** La pointe.
3. **Norma :** Sur le point B. Ouvrir le compas.
4. **Steven :** Assez long.
5. **Norma :** De façon…
6. **Steven :** Assez long pour que ça traverse la ligne là. (*Il parle de l'endroit où va se trouver la médiatrice.*)
7. **Norma :** De façon confortable. (*Elle cherche un mot qui lui permet d'exprimer son idée d'un cercle ayant un rayon assez grand pour englober le centre du segment.*)
8. **Pascale :** C'est quoi ça de façon confortable?
9. **Steven :** Ils n'ont pas trouvé ça encore là. (*en parlant de la médiatrice*)
10. **Norma :** Ils ne sont pas obligés de trouver ça. Premièrement, tu trouves tes deux cercles.
11. **Steven :** Oui, mais qu'est-ce qui arrive si les cercles sont pas assez longs? Si tes cercles vont jusqu'ici?… tu peux pas trouver l'affaire là. (*Il parle du cas où les deux cercles ne se croisent pas.*)
12. **Norma :** Oui, tu peux.
13. **Steven :** Tu ne peux pas.
14. **Norma :** Oui, regarde, si je les fais ça de gros.
15. **Pascale :** Oui, ça ne marchera pas.
16. **Steven :** … Ça ne se rencontrait pas.
17. **Norma :** Oui… OK, peut-être pas. (*Elle se reprend après avoir essayé de le faire sans succès.*)
18. **Pascale :** D'abord, écris de longueur appropriée.
19. **Norma :** Ils ne savent pas c'est quoi approprié.
20. **Steven :** Écris ça. (*Il montre un point sur la règle que Norma utilise, mais on ne voit pas.*)
21. **Norma :** D'environ 12 centimètres… non, excuse, excuse, je veux dire 6 centimètres.
22. **Enseignante :** Si tu as une ligne comme ça… ça fonctionnera peut-être pas… il faudrait que votre démarche fonctionne pour n'importe quelle ligne.

23. Steven : Écris assez long. Aussi gros que la médiatrice. Aussi long que la médiatrice.

24. Norma : Ils ne savent pas où ce qu'elle est la médiatrice.

25. Steven : Ils la trouvent, il y a une règle juste là.

26. Norma : Ils n'ont pas de règle.

27. Steven : Oui, ils en ont.

28. Norma : Non.

29. Steven : Oui.

30. Norma : Non.

31. Pascale : Madame nous l'a donnée à la fin [de l'activité], tu te rappelles?

32. Steven : Mais il faut qu'ils trouvent la médiatrice. Ils n'ont pas de choix. Nous, on l'a trouvée.

Au cours d'un travail en groupe, les élèves font des commentaires qui contribuent de façon variable à la discussion du groupe et aux apprentissages qui en résultent. Parfois, un doute, exprimé en un seul mot, peut changer le cours de la discussion. Parfois, c'est nécessaire d'expliquer en détail une idée qui peut être encore à l'état d'ébauche et qui ne deviendra objectivée que plus tard, après plusieurs échanges et discussions. Ainsi, en évaluant un élève, il convient de voir sa contribution de façon globale. Dans le cas qui nous occupe, où le critère visé est « engagement au dialogue et considération des arguments ou des propos des autres », la question est la suivante : Quelle semble être la contribution de Steven au groupe lorsqu'on considère ses interventions en fonction du critère mentionné?

On peut dire que Steven s'engage au dialogue. De plus, les propos qu'il tient sont pertinents. Il réfute l'idée de Norma présentée au début du dialogue. Il est soucieux d'un fait central dans la construction de la médiatrice, à savoir que les cercles doivent avoir un rayon assez grand pour qu'ait lieu la construction de la médiatrice. Steven sait que deux cercles qui ne se rencontrent pas ne pourront pas générer les points d'intersection (voir Figure 1).

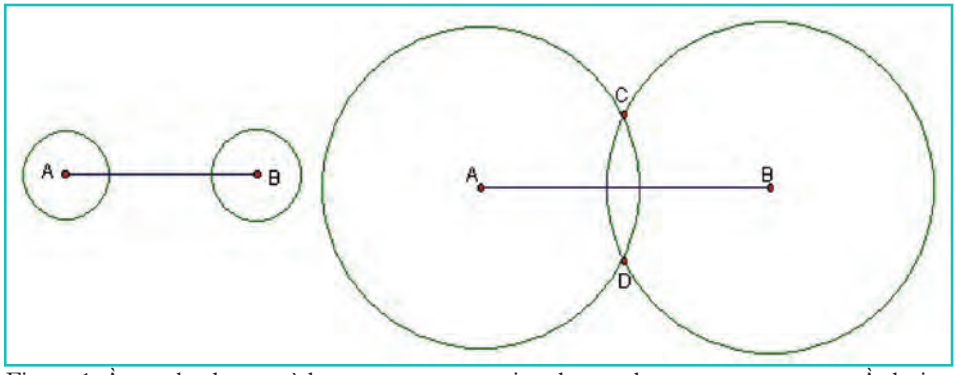


Figure 1. À gauche, le cas où le rayon est trop petit et les cercles ne se coupent pas. À droite, le cas où le rayon est suffisamment grand pour assurer que les cercles se coupent. La médiatrice de AB est définie par le segment qui joint les points C et D d'intersection des deux cercles.

À propos de l'efficacité de son argumentation, on peut dire qu'il a réussi à faire voir à Norma que les cercles ne peuvent pas être pris de façon tout à fait arbitraire. On note, par ailleurs, que Steven écoute les propos des autres, leur donne suite et aide à élaborer un argument important. Son argumentation est, au moins jusqu'à un certain point, efficace et pertinente.

En ce qui concerne le critère étudié, on peut, comme première approximation, situer le rendement de Steven autour du niveau 3. Pour lui attribuer un niveau 4, il nous semble que l'argumentation de Steven aurait dû être encore plus efficace. Une argumentation efficace est celle qui finit par convaincre l'autre. Nous voyons que l'extrait se termine par une situation où l'accord n'est pas encore unanime. Une argumentation efficace aurait peut-être été obtenue en indiquant, par exemple, que la longueur du rayon doit être plus grande que la moitié de la longueur du segment AB.

Quel serait le niveau qu'on pourrait attribuer à Norma, à la lumière du dialogue précédent, si on considère le même critère combiné que ci-dessus?

On remarque que Norma participe activement au dialogue. En fait, il est clair que Norma domine la discussion. Toutefois, l'élaboration de son argument souffre de quelques ambiguïtés. Dans une de ses premières interventions, elle utilise le terme *confortable*, pour vouloir dire *assez grand*. Sa coéquipière s'empresse de lui montrer l'imprécision de son langage, et elle finit par raffiner le terme. Elle domine la discussion, mais cela ne veut pas dire qu'elle n'écoute pas les autres. Elle est ouverte aux commentaires des autres, et elle sait s'ajuster en conséquence. Elle se rend compte du cercle vicieux où risque de s'enfermer l'argument de Steven, qui, pour trouver la médiatrice, fait allusion à la position de la médiatrice, alors que celle-ci n'a pas encore été trouvée. On donnerait à Norma un niveau 3, mais pour des raisons qui ne sont pas tout à fait les mêmes que pour Steven.

Tournons-nous du côté de Pascale. Pascale n'a pas fait beaucoup d'interventions, et ses interventions étaient plutôt courtes. Cependant, ses interventions aident ses coéquipiers à approfondir la réflexion. En effet, à la ligne 8, elle pose une question importante; à la ligne 18, elle donne une suggestion. On aurait certainement aimé qu'elle participe davantage à la discussion, bien qu'en regardant la vidéo on voit qu'elle est attentive, et qu'au début, c'est elle qui est chargée d'écrire la démarche à suivre. Vu que son engagement reste limité mais que, d'autre part, elle participe au travail d'équipe en prenant la responsabilité d'écrire le texte, qu'elle pose quelques questions pertinentes et donne une suggestion (ligne 18), on pourrait lui attribuer un niveau 1.

Il faudrait toutefois l'encourager à prendre une part plus active dans les discussions et lui demander de fournir des arguments pour soutenir ses propos.

Un des élèves n'a pas du tout participé au dialogue. C'est Joseph. Il faudrait s'assurer que Joseph participe davantage en l'invitant à reformuler les propos tenus par ses coéquipiers. L'enseignante ou l'enseignant pourrait lui demander de s'exprimer par rapport à l'idée proposée par Steven ou de faire une synthèse de ce qui a été dit. Il faut remarquer que Joseph est un élève en difficulté d'apprentissage, et qu'ainsi il peut être difficile pour lui de participer pleinement aux discussions.

Pour voir l'outil d'évaluation à l'œuvre, nous avons fait l'exercice suivant. Nous avons expliqué la méthodologie à cinq étudiantes et étudiants de notre programme de formation initiale à l'enseignement qui étaient en train de finir leur formation professionnelle. Ces étudiantes et étudiants ont regardé une fois l'extrait vidéo, en se concentrant sur Steven ainsi que sur le critère combiné et les descripteurs mentionnés ci-dessus.

Voici quelques-unes de leurs remarques après avoir vu l'extrait :

– On voit que Steven comprend la méthode, mais il a de la difficulté à expliquer comment faire la construction.

– Steven n'essaie pas de se faire comprendre.

– Il ne donne pas assez d'arguments.

– Tu vois qu'il s'engage, tu vois qu'il essaie d'expliquer.

– Il n'était pas nécessairement d'accord avec ce que la fille voulait essayer, mais au moins il disait pourquoi il n'était pas d'accord. Il considérait ce qu'elle disait.

– Son efficacité est peut-être un peu moins forte que sa logique et sa pertinence, mais moi je lui donnerais au moins un 3.

Ces commentaires ont un point en commun : Steven s'engage dans le dialogue, mais n'explique pas assez. Le niveau que nos étudiantes et étudiants ont donné à Steven allait de 2+ à 3. Après discussion, le groupe a décidé que, à la lumière de ce court extrait, le niveau à attribuer serait 3.

Le groupe considérait Norma légèrement plus forte que Steven en communication (mais pas forcément en acquisition de concepts). Toutefois, elle n'avait pas montré une maîtrise de la compétence Communication qui correspondrait au niveau 4, de sorte que le niveau que ce groupe a attribué à Norma a été 3. Voici quelques remarques exprimées par les membres du groupe :

– Elle s'engage beaucoup et considère très bien les arguments des autres.

– Moi, j'ai trouvé qu'elle a considéré les arguments de Steven parce qu'elle a utilisé les arguments de celui-ci pour les réfuter (en faisant un dessin).

– Je suis d'accord qu'elle a certainement un engagement, mais je ne suis pas encore convaincu qu'elle considère suffisamment les arguments des autres.

– Elle n'essaie pas assez de comprendre Steven.

– Elle donne certainement une suite aux arguments de Steven, mais elle ne donne pas suite aux arguments avec efficacité et pertinence.

– Elle fait le dessin. Pour moi, c'est une bonne façon de donner suite à un argument!

Il peut être intéressant de remarquer que nous avons pris un autre passage de la leçon qui dure environ six minutes. Il s'agit d'une partie de la leçon qui a lieu cinq minutes après l'extrait que nous venons de voir. *Grosso modo*, il nous permet de confirmer ce qu'on avait déjà noté lors du dialogue précédent : Norma contribue à la discussion de façon constante. Elle le fait en tenant des propos mathématiques pertinents. Steven donne suite aux propos des autres et contribue en amenant des arguments qui sont pertinents et efficaces. Pascale participe en même temps qu'elle se fait aider par les autres. Toutefois, la logique et la profondeur de ses arguments doivent être encore améliorées. On remarque encore que Joseph ne parle vraiment pas beaucoup. Sa seule intervention dans ces six minutes d'observation est ignorée par le groupe.

Comme piste à suivre pour l'enseignante ou l'enseignant, il faudrait, par la pratique, encourager les élèves à donner des arguments plutôt que de simplement entrer dans un échange de oui et de non (voir lignes 27 à 30). Il faut les inciter à expliquer leur position par l'utilisation d'un exemple, d'un contre-exemple, ou toute autre argumentation possible. À long terme, cette démarche axée sur l'argumentation devrait permettre aux élèves d'avoir des échanges beaucoup plus profitables. C'est vraiment en faisant des activités de communication sur une base régulière que la capacité des élèves augmentera, et qu'il deviendra ainsi plus facile de les évaluer dans cette compétence.

Étudions maintenant le texte produit par ces élèves.

Syntaxe et symboles et organisation de la présentation

Afin de faire l'évaluation de la compétence Communication, nous allons étudier le travail écrit qui a découlé des discussions que le groupe a eues. La figure 2 est une copie du texte proposé par le groupe de Norma, Joseph, Steven et Pascale. L'évaluation du texte se fera en partant de deux autres critères qui n'ont pas encore été abordés dans ce chapitre, à savoir la « Syntaxe et symboles » et l'« Organisation de la présentation », toujours selon les descripteurs fournis dans notre grille de rendement.

Ce que nous cherchons dans ce travail écrit, c'est de vérifier si l'utilisation des symboles, des conventions et de la terminologie mathématiques est claire et exacte; nous cherchons également à vérifier si l'organisation de la présentation se fait de façon claire, logique et efficace.

Une remarque préliminaire est que les trois premières étapes de la construction proposée sont trop axées sur des détails d'utilisation du compas et pas suffisamment sur la production de la médiatrice.

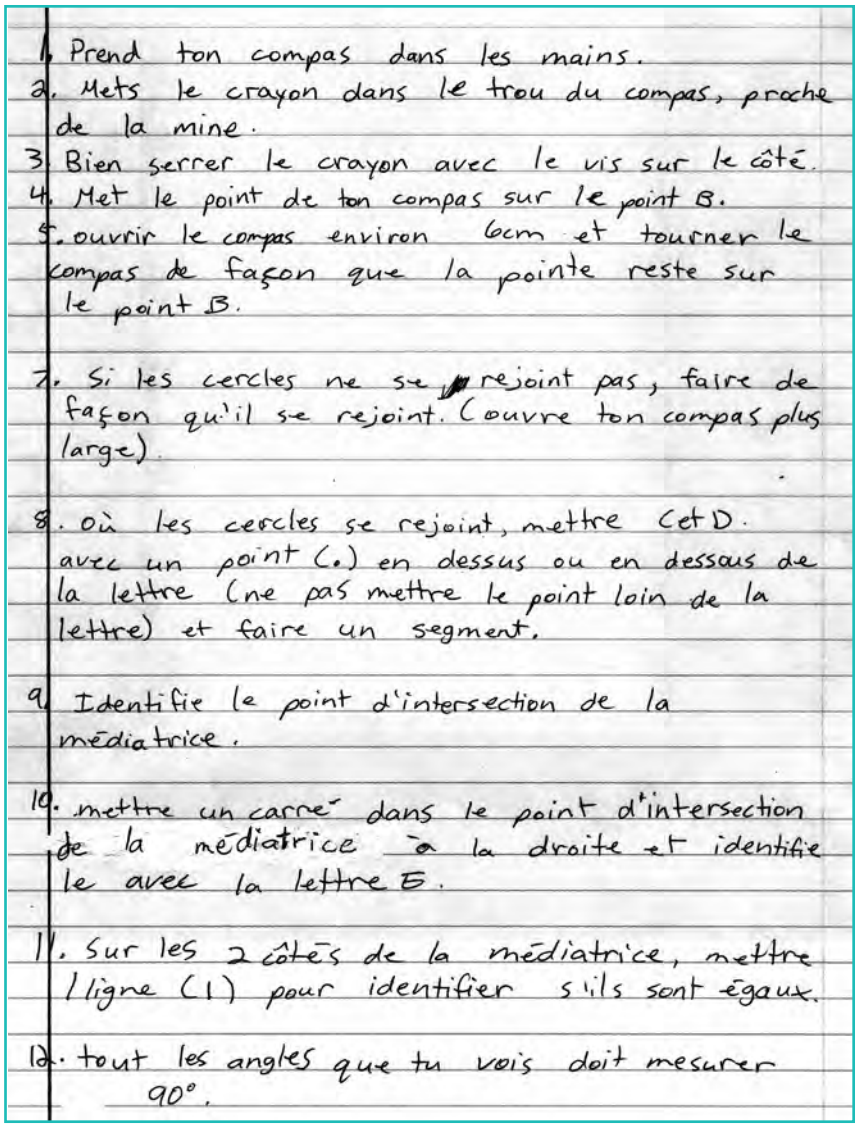

1. Prend ton compas dans les mains.
2. Mets le crayon dans le trou du compas, proche de la mine.
3. Bien serrer le crayon avec le vis sur le côté.
4. Met le point de ton compas sur le point B.
5. ouvrir le compas environ 6cm et tourner le compas de façon que la pointe reste sur le point B.
7. Si les cercles ne se rejoint pas, faire de façon qu'il se rejoint. (ouvre ton compas plus large).
8. où les cercles se rejoint, mettre C et D. avec un point (.) en dessus ou en dessous de la lettre (ne pas mettre le point loin de la lettre) et faire un segment.
9. Identifie le point d'intersection de la médiatrice.
10. mettre un carré dans le point d'intersection de la médiatrice à la droite et identifie le avec la lettre E.
11. Sur les 2 côtés de la médiatrice, mettre 1 ligne (1) pour identifier s'ils sont égaux.
12. tout les angles que tu vois doit mesurer 90°.

Figure 2. Texte du groupe de Norma portant sur la construction de la médiatrice à l'aide d'une règle et d'un compas.

On remarque ici un phénomène que nous avons mis en évidence au moment d'étudier les textes produits par des élèves de 1re et 2e année (voir chapitre 5). Les arguments de ces jeunes élèves incluaient souvent des éléments qui ne sont pas faux (comme le fait d'avoir un espace assez grand pour être en mesure de garder un nombre élevé d'arachides), mais qui ne sont pas pertinents du point de vue mathématique. Les premières lignes du texte portant sur la construction de la médiatrice montrent que la distinction entre la clarté et le détail n'est pas évidente au début du cycle intermédiaire. Il faut (comme c'était le cas en 1re et 2e année) un travail explicite de la part de l'enseignante ou de l'enseignant pour rendre cette distinction apparente. Ce travail explicite devrait faire en sorte que les élèves comprennent qu'un argument clair ne veut pas dire un argument plein de détails[43].

À l'étape 5 de la méthode de construction, on remarque que les élèves font savoir expressément que l'on doit ouvrir le compas d'environ 6 cm. Cette idée avait été proposée par Norma lors de la discussion du groupe et celle-ci se retrouve, ici, dans le texte final produit par les élèves, malgré l'opposition de Steven (et même de l'enseignant). Mais l'idée apparaît ici sous forme rajustée. En effet, à la ligne 7, on donne une façon de reprendre le processus si les deux cercles ne se croisent pas. Cela rend la construction proposée *efficace*, en ce sens qu'elle permet d'arriver au résultat attendu. Mais elle aurait pu être plus efficace encore. Dans le choix des arguments, les élèves auraient pu élaborer une construction plus directe, qui n'a pas besoin de ce processus d'approximations successives.

À la ligne 8, les points C et D sont bien désignés comme les points d'intersection des cercles. La construction du segment CD aurait pu être énoncée de façon plus explicite. Le texte dit : « et faire un segment ». Puisqu'il y a quatre points maintenant sur le dessin (A, B, C et D), il faut éviter l'ambiguïté. Ainsi, on aurait pu dire « Construis maintenant le segment CD ».

La ligne 9 dit : « Identifie le point d'intersection de la médiatrice ». Or, on n'a pas dit que CD est la médiatrice recherchée. De plus, quand un objet géométrique est défini comme intersection de deux autres objets, il faut s'assurer de les mentionner de façon explicite. Ici, un des objets est la médiatrice, mais quel est l'autre objet? On peut comprendre, bien sûr, que c'est le segment AB. Mais, justement, c'est ce détail qui est important dans cette étape.

On peut se demander ce qu'est le but des lignes 11 et 12 dans le contexte des étapes de construction de la médiatrice. S'agit-il d'un élément qui participe à la construction? Ou bien s'agit-il d'un élément qui découle de la construction? Le caractère logique des lignes 11 et 12 n'est pas clair.

Des points positifs devraient être soulignés également. Par exemple, en plus de l'efficacité de la construction que nous avons déjà mentionnée, on constate que le groupe fait preuve d'un souci des conventions qui régissent la position des lettres dans un diagramme géométrique, en particulier à l'étape 8.

Résumons les résultats de notre analyse. Les élèves font preuve d'un niveau convenable en ce qui a trait à la syntaxe, même si la terminologie reste parfois un peu ambiguë.

Le texte est efficace en ce qu'il permet d'arriver au résultat escompté, mais il aurait pu l'être davantage. L'organisation de la présentation aurait pu être améliorée en supprimant des détails superflus; si d'autres détails ou précisions devaient être fournis, les élèves auraient mieux fait d'avoir eu recours à d'autres

---

43 Bien sûr, les raisons conceptuelles qui sous-tendent le concept d'argument clair ne sont pas nécessairement les mêmes au cycle primaire qu'au cycle intermédiaire. Dans le cas des constructions géométriques, on doit faire abstraction du type de compas et se centrer sur ses propriétés mathématiques. Dans le cas du cycle primaire, la clarté est liée à la tendance qu'ont les élèves à produire des textes qui sont insuffisants pour qu'un autre élève puisse les comprendre.

moyens de communication, comme les diagrammes. Cela aurait apporté plus de clarté au texte. Le texte présente une certaine logique, mais il y a des énoncés dont le caractère logique reste douteux. Bref, on pourrait dire que les élèves atteignent les exigences d'un niveau 3 en Syntaxe et symboles et un niveau 2 en Organisation de la présentation.

Le niveau global en communication

Revenons aux quatre critères et essayons de dresser un profil général pour les élèves. Commençons par Steven. Le tableau 1 donne son profil.

Steven	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 3**	**Niveau 4**
Syntaxe et symboles				
Organisation de la présentation				
Engagement au dialogue et Considération des arguments et des propos des autres				

Tableau 1. Profil de rendement de Steven. À la lumière de ce tableau, on pourrait attribuer à Steven un niveau 3.

L'allure du tableau de Norma serait la même que celle de Steven et elle se verrait attribuer un niveau 3, également. Remarquons, toutefois, que, lorsque nous avons fait l'exercice d'évaluation avec nos étudiants-maîtres, plusieurs ont souligné le fait que Norma pourrait se voir attribuer un niveau plus élevé que celui de Steven, grâce à son engagement constant au dialogue.

Le tableau 2 donne le tableau de Pascale.

Pascale	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 3**	**Niveau 4**
Syntaxe et symboles				
Organisation de la présentation				
Engagement au dialogue et Considération des arguments et des propos des autres				

Tableau 2. Profil de rendement de Pascale.

Le cas de Pascale est plus complexe. D'une part, elle n'a pas participé activement à la discussion. D'autre part, c'est elle qui a écrit le texte. Il faut tout de même dire qu'on peut voir sur l'extrait vidéo analysé ci-dessus et dans la discussion qui s'en est suivie que Pascale comprend les éléments clés et qu'elle participe un peu à la discussion. Comme nous l'avons noté précédemment, il faudrait que Pascale participe davantage aux discussions de groupe afin d'améliorer son rendement en communication. Il semble que, en l'absence de données supplémentaires et à la lumière du profil élaboré ci-dessus (Tableau 2), elle se situerait globalement au niveau 2.

Regardons maintenant le cas de Joseph. Joseph a très peu participé au premier dialogue présenté, et encore moins au second. Il faut noter que Joseph est un élève en difficulté. De ce fait, l'enseignante ou l'enseignant de mathématiques devrait évaluer ses efforts différemment des autres élèves de la classe. Cela ne veut pas dire qu'on s'attend à ce qu'il ne participe pas aux discussions, mais il faudrait probablement une intervention directe de la part de l'enseignante ou de l'enseignant pour le faire participer et l'aider à communiquer. Étant donné qu'il y a plusieurs inconnues au sujet de Joseph et qu'il est peu intervenu, il ne serait pas juste de lui attribuer un niveau de rendement. Pour pouvoir lui attribuer un niveau, il faudrait lui offrir l'occasion d'exprimer ses propos mathématiques en s'y prenant différemment. On pourrait penser à le faire travailler dans un groupe de deux élèves ou, le cas échéant, avec l'enseignante ou l'enseignant.

Pour terminer, rappelons que, comme nous l'avons indiqué au chapitre 2, l'évaluation joue un double rôle : d'une part, elle permet de situer le niveau de rendement de l'élève à un moment donné de sa scolarité; d'autre part, elle sert de point de départ à un projet mené par l'enseignante ou l'enseignant et l'élève afin d'améliorer l'apprentissage. En effet, dire qu'un élève a atteint un certain niveau, c'est mettre en évidence les aspects que cet élève doit améliorer pour accéder au prochain niveau.

4. Pour en savoir plus...

Asturias, H. (1994, December). "Using students' portfolios to assess mathematical understanding". *The Mathematics Teacher*, 87 (9), 698-701.

Lane, S. (1993, Summer). "The conceptual framework for the development of a mathematics performance assessment instrument". *Educational Measurement: Issues and Practice*, 16-23.

Schloemer, C., G. Lewis and J. Metz. (1994, January). "Sharing teaching ideas". *The Mathematics Teacher*, 87 (1), 18-25.

Chapitre 10

En guise de conclusion

Aux chapitres précédents, nous avons proposé une série d'objectifs pouvant servir de repère aux démarches pédagogiques qui visent à favoriser la maîtrise de la compétence Communication. Pour atteindre ces objectifs, nous avons souligné l'importance de bien choisir l'activité mathématique et la stratégie d'enseignement.

D'une part, l'activité doit être conceptuellement assez riche pour justifier le travail en groupe. Plus précisément, pour que la collaboration ait un sens et qu'elle soit productive, l'activité mathématique doit se situer sur ce que Vygotski a appelé la *zone proximale de développement* des élèves. Cela veut dire que le niveau de difficulté de l'activité doit être tel qu'il rend la collaboration entre pairs nécessaire. D'autre part, et en harmonie avec le niveau de difficulté de l'activité, le choix de la stratégie d'enseignement doit faire appel au travail en petits groupes et faciliter un échange et une collaboration non seulement à l'intérieur de chaque petit groupe, mais aussi entre groupes. Les choix concernant l'activité et la stratégie d'enseignement ont été illustrés à l'aide de plusieurs leçons qu'on trouvera dans l'annexe qui suit ces conclusions.

Or, puisqu'une des idées centrales du concept de développement auquel nous adhérons est un concept selon lequel le développement est affecté par l'apprentissage, les objectifs proposés doivent être pris à titre indicatif seulement. Ils doivent être adaptés aux particularités des élèves, de l'enseignante ou de l'enseignant. Il se peut, par exemple, que les catégories sociodiscursives (comme savoir écouter) ou les catégories argumentatives, à savoir celles qui distinguent la clarté, la complétude et la suffisance dans un argument, soient déjà maîtrisées avec une profondeur plus grande que nos objectifs ou même nos observations de salle de classe ne le suggèrent. Le développement est, en effet, beaucoup plus malléable par le contexte que le supposaient les courants biologiques en éducation. Il faut donc tenir compte de l'histoire de la classe.

Toutefois, il ne faudra pas perdre de vue que le but de l'enseignement des mathématiques n'est pas simplement de faire apprendre aux élèves à discuter et à maîtriser les catégories argumentatives. Ce serait réduire les mathématiques à une pure activité discursive. Certes, les mathématiques ont leur propre forme de discours, mais ce n'est pas là leur principale caractéristique, encore moins lorsqu'on les considère du point de vue de l'école. Mais, si c'est ainsi – pouvons-nous nous demander avec juste raison –, pourquoi avons-nous insisté avec tant d'obstination sur la communication?

Résumons en quelques mots ce que nous avons voulu développer en détail dans les chapitres précédents. Si nous avons insisté tout le long de ce livre sur l'importance que revêt la communication pour l'apprentissage, c'est pour deux raisons interreliées. En premier lieu, parce que l'apprentissage est un processus de transformation des concepts culturels en objets de conscience (que ce soit le concept du nombre en mathématiques, celui de pays en sciences sociales, celui du passé en histoire, etc.). En second lieu, parce que le raisonnement et l'argumentation sont, pour l'élève, des moyens d'*appropriation* et de *réflexion* du monde qui l'entoure : ils permettent à l'élève d'appréhender les concepts inscrits dans sa culture.

Il y a un principe fondamental attaché à l'idée que la prise de conscience dont fait partie l'apprentissage se fait au moyen de l'argumentation et du raisonnement. D'après ce principe, à des modes d'argumentation et de raisonnement plus sophistiqués, correspondent des prises de conscience plus profondes et des conceptualisations mathématiques plus complexes. En contrepartie, toujours d'après ce même principe, l'acquisition de concepts plus complexes exige la mise en œuvre de raisonnements plus

profonds. C'est cette relation dialectique que nous avons formulée sous le principe d'interdépendance cognitive entre concept et raisonnement au chapitre 1. C'est cette relation qui justifie la nécessité de promouvoir les discussions en classe et de distinguer la clarté, la justesse et la suffisance d'un argument.

Bien que n'importe quel exemple tiré des chapitres précédents puisse servir à bien illustrer ces propos, prenons, pour fixer les idées, celui de la classe de 1re et 2e année. Au cours de la leçon, les élèves ont été amenés à étudier la suite numérique 8, 10, 12, 14, 16, etc. Les élèves ont été confrontés à la question de savoir si oui ou non 27 faisait partie de cette suite. Sans l'aide de l'enseignante, les élèves ont pu déterminer qu'effectivement 27 ne faisait pas partie de la suite. Mais ils étaient incapables, par eux-mêmes, de fournir des arguments plus précis. Avec l'aide de l'enseignante, les élèves sont arrivés à fournir une preuve directe[44], mais aussi une preuve plus générale, basée cette fois sur la parité des nombres. On voit ainsi qu'une argumentation plus fine permet l'accès à un niveau plus grand de conceptualisation du problème en question, c'est-à-dire du problème qui, en termes généraux, est celui des moyens auxquels on peut avoir recours pour déterminer si, étant donné une suite quelconque, un élément appartient ou non à la suite.

Naturellement, il est clair que tous les problèmes de ce genre ne peuvent pas être résolus par un raisonnement basé sur la parité des nombres. Cela n'empêche pas que ce type de raisonnement a permis aux élèves d'atteindre un niveau conceptuel plus élevé. C'est dans la prise de conscience que la suite numérique 8, 10, 12, 14, 16, etc. n'est pas constituée seulement d'une agglomération d'éléments, mais que ces éléments constituent un *système* gouverné par des propriétés mathématiques précises qu'a lieu l'apprentissage.

Si, donc, la communication est importante en salle de classe, elle ne l'est pas parce que les mathématiques sont une activité discursive. C'est parce que la communication est un moyen de transformation d'objets culturels en objets de conscience et qu'apprendre revient à s'approprier ces objets.

Mais il faut faire attention sur ce dernier point. La saisie des objets culturels conceptuels par l'élève (p. ex., le losange, vu au chapitre 7) ne s'accomplit pas de façon immédiate. L'élève n'est pas une table rase sur laquelle on imprime un concept. L'élève n'est pas non plus un récipient dans lequel on verse un savoir comme on verse du lait dans un verre. Nous avons mentionné au chapitre 1 l'échec des écoles empiristes et behavioristes à ce sujet. La complexité de l'apprentissage consiste en ceci : le point d'arrivée d'un apprentissage est la saisie d'un objet culturel conceptuel qui existe indépendamment de la conscience qui se l'approprie[45]. Or, pour apprivoiser ce savoir, l'élève ne peut faire autrement que de mobiliser les ressources personnelles et cognitives dont elle ou il dispose. L'apprentissage passe donc par un processus continuel d'interprétations personnelles.

C'est justement parce que la subjectivité et les ressources cognitives varient d'un élève à l'autre que le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est fondamental. S'il s'agissait de programmer un ensemble d'ordinateurs identiques, cela n'aurait aucun sens d'écrire une liste d'instructions pour le premier ordinateur, une autre liste d'instructions pour le deuxième, et ainsi de suite : tous ces ordinateurs vont

---

44 La suite contient 22, 24, 26, 28; donc, elle ne contient pas le terme 27.

45 Ainsi, quand l'élève arrive à l'école pour la première fois, les catégories de nombres pairs, impairs, négatifs, fractions, etc. font déjà partie de l'ensemble des concepts inscrits dans la culture.

« réagir » de la même manière à la même liste. Un ordinateur n'interprète pas : il exécute. Il en va autrement avec les élèves.

Il y a plusieurs années, le linguiste et philosophe Valentin Nikolaevich Vološinov disait que la route qui mène du contenu de la pensée de l'individu au contenu de la culture est longue et dure, et qu'elle est différente d'une personne à l'autre[46]. C'est cette route qui doit être parcourue par chacun de nos élèves. Ce que ce livre a voulu mettre en évidence, c'est que les forêts et les vallées que cette route traverse sont peuplées de concepts auxquels nous accédons par la parole car, comme notait Vygotski, « le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale[47] ».

46 V. N. Vološinov. (1976). *Freudianism, A Critical Sketch.* Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, p. 87.

47 L. Vygotski, *Pensée et langage*, p. 157.

Annexe 1

Une leçon pour le cycle préparatoire

C'est dans le sac!

Une activité sur le dénombrement
et la probabilité

Jardin d'enfants

Durée

Deux périodes de 40 minutes chacune.

Description

Dans cette activité, l'élève approfondit ses connaissances liées au concept du diagramme (tableau simple) et de la probabilité. De plus, l'élève compare ses données et ses prédictions.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Domaines

– Numération et sens du nombre

– Traitement de données

Attentes

– Utiliser les rudiments du système de numération et démontrer une certaine compréhension du sens du nombre.

– Faire preuve de persévérance et utiliser des stratégies simples pour résoudre des problèmes d'ordre pratique dans l'accomplissement de tâches.

– Recueillir, organiser, comparer et représenter des données.

Contenus d'apprentissage

– Estimer un nombre d'objets inférieur à 10 (p. ex., le nombre de craies de cire que renferme un bocal).

– Comparer la quantité d'objets de deux ensembles qui en comprennent au plus 10, en utilisant les expressions « plus que », « moins que » et « égal à ».

– Recueillir des données et les représenter sur un tableau simple (p. ex., en traçant un X ou un O pour indiquer les absences et les présences, en dessinant un soleil ou un nuage pour enregistrer les jours de beau temps et de mauvais temps).

– Comparer les données recueillies en utilisant les expressions « plus que », « moins que » et « égal à » (p. ex., « dans la classe, il y a plus d'amis qui ont un chat que d'amis qui ont un chien »).

Notes de planification

Voir le manuel scolaire *Interactions-maternelle*, de J. Hope et M. Small. La Chenelière, Montréal, Québec, 1997, p. 110.

Pour la mise en situation

– Préparer une boîte transparente contenant six cubes; deux de couleur verte et quatre de couleur orangé.

– Préparer un tableau d'une rangée de six cases. (Ce tableau sera utilisé pendant la mise en situation.)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Pour l'activité

– Préparer 6 sacs de 10 cubes (4 bleus et 6 jaunes).

– Sur la page d'activité (feuille de route 1, où l'on aura indiqué le numéro du groupe et où les élèves écriront leur nom), préparer un tableau d'une rangée de 10 cases, comme ci-dessous. (Ce tableau sera utilisé pendant le travail en groupes de trois élèves.)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

– Sur une seconde page d'activité (feuille de route 2, où l'on aura indiqué le numéro du groupe et où les élèves écriront leur nom), préparer un tableau de deux rangées de 20 carrés chacune, comme ci-dessous. (Ce tableau sera utilisé pendant le travail en groupes de six élèves.)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

Acquis préalables

- Compter jusqu'à 20.
- Comparer la quantité d'objets de deux ensembles qui en comprennent au plus 10.
- Recueillir des données.
- Comparer des données.
- Estimer un nombre inférieur à 10.

Déroulement de l'activité

Mise en situation

On montre aux élèves la boîte, on compte avec eux le nombre de cubes de chaque couleur. Ensuite, on dit : « Si on tire au hasard six fois un cube, en remettant chaque fois le cube tiré dans la boîte, pensez-vous qu'on tirera autant de cubes verts que de cubes orangés? » On demande aux élèves qui sont d'accord avec cette idée de lever la main. On demande ensuite aux élèves qui ne sont pas d'accord avec cette idée de lever la main.

On demande à un élève parmi ceux qui sont d'accord avec l'idée avancée d'expliquer ses raisons. On fait de même avec un élève parmi ceux qui ne sont pas d'accord avec l'idée avancée.

On dira que, pour étudier l'idée, on va faire une expérience; on leur dit qu'on va *recueillir* et *organiser des données*.

Note : Les expressions « expérience », « recueillir des données », « organiser des données » font partie du vocabulaire que l'enseignante ou l'enseignant insère au cours de la communication orale. On fera un effort pendant l'activité pour que les enfants utilisent à leur tour ce vocabulaire.

1. Inviter un élève à venir tirer un cube dans la boîte transparente.
2. Demander à l'élève de prédire s'il ou elle tirera un cube vert ou un cube orangé.
3. Permettre à l'élève de tirer, les yeux fermés, un cube de la boîte et de nommer sa couleur. L'élève remet ensuite le cube dans la boîte.
4. Demander à un deuxième élève de colorier la première case du tableau de six cases de la couleur du cube qui est tiré. (Cet élève restera devant la classe pour continuer à colorier les cases suivantes.)
5. Inviter un troisième élève à venir tirer un cube.
6. Procéder de la même façon qu'avec le premier élève.
7. Faire de même jusqu'à ce que six élèves aient tiré un cube.
8. Compter le nombre de cubes verts et le nombre de cubes orangés dans le tableau.
9. Compter (à nouveau) le nombre de cubes verts et le nombre de cubes orangés dans la boîte.

10. Susciter une réflexion concernant le nombre de cubes verts et orangés dans la boîte et le nombre de cubes verts et orangés dans le tableau (p. ex., « Pourquoi pensez-vous qu'on a eu plus (ou moins ou un nombre égal selon le résultat de l'expérience) de blocs verts que de blocs orangés? »).
11. Après la réflexion, pour terminer la mise en situation, on peut poser la question suivante : « Et si on tirait 12 fois un bloc au lieu de 6 fois, combien de fois pensez-vous tirerait-on des cubes verts? Combien de fois tirerait-on des cubes orangés? »

    On écoute deux ou trois réponses et l'on dit aux enfants qu'on va faire une autre expérience, en petits groupes cette fois-ci, et qu'après on va comparer les résultats. (Regrouper les élèves en petits groupes de trois élèves chacun pour faire l'expérience avec 10 cubes : 4 bleus et 6 jaunes.)

Exploration des concepts/Expérimentation

(Tout le long de cette partie de la leçon, les élèves ne peuvent pas voir le contenu du sac qui est maintenant non transparent.)

Étape 1

1. On donne aux élèves la feuille de route 1. Ils écrivent leur nom sur la feuille (une feuille par groupe).
2. Le premier élève du groupe tient le sac et s'assure que personne ne voit son contenu.
3. Le deuxième élève prédit la couleur du cube qu'il ou elle tirera. Le premier élève tire un cube du sac. Il ou elle nomme la couleur du cube et le remet dans le sac.
4. Le troisième élève colorie la première case du tableau d'une rangée de 10 cases de la couleur du cube tiré.
5. Les élèves continuent de même en remplissant les 10 cases du tableau remis dans la feuille d'activités.
6. Les élèves comptent le nombre de cubes bleus et le nombre de cubes jaunes qu'ils ont tirés du sac. Ils écrivent le résultat sur la feuille d'activités qu'on leur a remise.

Étape 2

Chaque groupe se réunit avec un autre groupe désigné par l'enseignante ou l'enseignant. On donne aux élèves la feuille de route 2. Ils écrivent le numéro de leur groupe.

1. En s'adressant aux groupes de six élèves, l'enseignante pose la question suivante : « Est-ce que les deux groupes qui se réunissent ont eu la même réponse lorsqu'ils ont fait l'expérience? Expliquez les différences, s'il y en a. Attendez votre tour pour parler. »
2. En se référant à la feuille de route 2, demander aux élèves de mettre ensemble leurs données sur le tableau. Les élèves chargés de colorier le tableau dans leur groupe respectif seront responsables de colorier leur portion dans le tableau à 20 cases. (Ainsi, par exemple, si le groupe 1 a eu trois cases bleues et le groupe 2 a eu six cases bleues, les élèves doivent colorier neuf cases bleues en tout. Si le groupe 1 a eu sept cases jaunes et le groupe 2 a eu quatre cases jaunes, les élèves doivent colorier 11 cases jaunes en tout.)

3. Quand les élèves auront fini de colorier le tableau conjoint, l'enseignante pose aux groupes de six élèves les questions suivantes :

   a) Avez-vous plus de cases d'une couleur que de l'autre? Ou bien, avez-vous le même nombre de couleurs de cases? (*En continuant notre exemple, les élèves répondraient : « On a eu plus de cases jaunes. »*)

   b) Est-ce que les deux groupes ont eu plus de cases jaunes (*ou de cases bleues, selon le cas*)?

   c) Pourquoi croyez-vous que les résultats sont différents? Expliquez les différences, s'il y en a. Attendez votre tour pour parler.

Étape 3

1. Inviter les élèves à s'asseoir en cercle pour discuter.
2. Poser les questions suivantes :

   En sachant qu'il y a en tout 10 cubes dans votre sac…

   a) Combien de cubes jaunes croyez-vous qu'il y a dans votre sac?

   b) Combien de cubes bleus croyez-vous qu'il y a dans votre sac?
3. On demandera aux élèves d'expliquer leur raisonnement. Quand un élève exprimera un argument intéressant, on demandera à un autre élève de dire s'il ou elle trouve convaincant l'argument de son ami. Donner l'occasion au premier élève de se défendre, en répondant au deuxième élève. Au besoin, on fera intervenir d'autres élèves dans la discussion.
4. Permettre aux élèves de faire la vérification en comptant le nombre de cubes bleus et le nombre de cubes jaunes dans le sac.

Étape 4

1. Préparer un sac de 5 blocs : 3 rouges et 2 blancs.
2. Préparer un tableau par groupe comme celui-ci.

	rouge	blanc
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3. Demander aux élèves de remplir le tableau en y mettant toutes les combinaisons possibles de cubes rouges et de cubes blancs dans le sac (0 rouge, 5 blancs… 1 rouge, 4 blancs… 2 rouges, 3 blancs… 3 rouges, 2 blancs… 4 rouges, 1 blanc… 5 rouges, 0 blanc).
4. Demander aux élèves d'indiquer les combinaisons les plus probables si l'on tirait cinq blocs au hasard, en remettant le bloc tiré après chaque tirage.

Annexe 2

Une leçon pour le cycle primaire

L'écureuil qui se préparait pour l'hiver!

Modélisation et algèbre

1re et 2e année

Durée

Deux périodes de 60 minutes chacune.

Années d'études visées

1re et 2e année.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Domaine

Modélisation et algèbre

Attentes

– Identifier la régularité dans une suite numérique et non numérique (1re année).

– Prolonger une suite en maintenant la régularité (2e année).

Contenus d'apprentissage

– Identifier une régularité dans une suite numérique (1re année).

– Identifier et expliquer, à l'aide de matériel concret ou semi-concret, la régularité dans une suite non numérique ou numérique (2e année).

Notes de planification

– Former des équipes de travail (trois élèves par groupe).

– Se procurer un écureuil et un suisse (marionnettes ou autres) ainsi qu'un petit décor comportant trois arbres.

– Se procurer assez d'arachides en écale pour que les élèves puissent vérifier leurs réponses jusqu'à la question (2a) incluse (20 arachides par équipe).

– Faire des copies de la feuille de route.

Acquis préalables

– Connaître le concept des nombres pairs et impairs.

– Être capable de compter par bonds de 2 et à rebours.

Déroulement de l'activité

Mise en situation

L'enseignante ou l'enseignant raconte l'histoire suivante :

> Hier soir, un petit écureuil est venu sur le seuil de ma porte et m'a raconté son aventure de l'automne dernier. Voici ce qu'il m'a dit. Alors qu'il commençait à faire un peu froid, je devais me trouver un abri confortable pour passer l'hiver. Je me promenais dans les bois, derrière chez toi, et j'ai fait une merveilleuse découverte. Écoute bien ce qui m'est arrivé…
>
> Pendant ma promenade, il y a eu un gros orage et je suis entré dans un trou qui se trouvait dans l'arbre le plus près de moi. Comme cet abri n'était pas très grand, j'ai décidé après l'orage de continuer ma recherche. Après quelques minutes de marche, je suis arrivé devant un très grand chêne ayant un trou tout juste parfait pour mon petit corps et ma grande queue. Comble de bonheur, dans cette charmante petite maison, j'ai trouvé trois arachides bien fraîches. J'étais très heureux et j'ai décidé de m'y installer pour la saison froide. Soudain, un petit suisse est entré sans frapper et m'a dit que j'étais installé chez lui et que les arachides faisaient partie de ses provisions pour l'hiver. J'ai donc quitté cet abri confortable et j'ai continué à chercher. Finalement, j'ai découvert un merveilleux trou où il y avait huit belles arachides à l'intérieur. Je m'y suis reposé et à mon grand plaisir, aucun autre petit animal n'est venu me dire que j'étais chez lui. J'avais donc trouvé ma maison pour l'hiver. Il ne me restait plus qu'à augmenter mes provisions d'arachides. J'étais quand même chanceux, car j'en avais déjà huit et je n'avais fait aucun effort pour les trouver.
>
> Puis, il a ajouté : maintenant que tu connais mon aventure, j'aimerais que tu joues avec moi à un jeu d'énigmes (devinettes). Je te donne deux jours pour trouver les réponses.

Expérimentation et exploration

L'enseignante dit, en s'adressant à la classe : j'ai un peu de difficulté avec les devinettes, voulez-vous m'aider?

Pour t'aider à trouver les réponses, voici ce qu'il faut que tu saches : lorsque le petit écureuil a commencé à faire ses provisions, il a ramassé le même nombre d'arachides tous les matins et n'en a jamais mangé.

Je t'ai aussi préparé un petit tableau. Si tu le regardes bien, tu devrais avoir de bons indices pour répondre aux prochaines questions. (Les élèves remplissent la feuille de route 1 placée ci-dessous.)

À la suite de cette activité, il faut prévoir une période pour l'échange des stratégies utilisées et l'évaluation des travaux des pairs.

Voici la marche à suivre.

Échange des solutions

En restant à leur place, chaque petit groupe d'élèves échange sa feuille de solutions avec deux autres groupes (au besoin, on peut limiter l'échange : à la place d'échanger avec deux groupes, on peut choisir d'échanger avec un groupe seulement). Le choix des groupes qui échangent les feuilles entre eux revient à l'enseignante.

Les élèves doivent étudier la solution des autres groupes et indiquer si les arguments présentés par les autres groupes sont :

– clairs,

– justes (Est-ce que l'argument est vrai? Est-ce que l'argument est faux?),

– suffisants.

Rencontre avec l'autre groupe

À la suite de l'étape 1, les groupes qui ont échangé leurs solutions se réunissent. (Deux groupes se déplacent et vont voir l'autre groupe. Il faut prévoir l'organisation des pupitres en conséquence.) À tour de rôle, ils expliquent la démarche suivie pour résoudre les problèmes.

Discussion générale

À la suite de l'étape 2, l'enseignante invite un élève à aller devant toute la classe et à présenter la solution qui a été donnée par son groupe à la question 3a ou 3b. L'enseignante explique à l'élève que son raisonnement doit faire appel à des arguments convaincants.

Les autres élèves écoutent et commentent la solution présentée.

Un élève d'un autre groupe passe au tableau et présente la solution à la question 4. Comme ci-dessus, les autres élèves écoutent et commentent la solution présentée.

Après que les élèves ont fini de discuter les solutions à la question 3a ou 3b (respectivement, question 4), l'enseignante commente, elle aussi, les solutions pour faire ressortir les avantages et les inconvénients des solutions proposées, tant du point de vue mathématique que de celui de la communication.

Feuille de route 1[48]
(activité 1re-2e année)

Noms des élèves : _____

Le nombre d'arachides dans les provisions après chaque jour

Nombre de jours	0	1	2	3			
Nombre d'arachides	8	10	12	14			

Question 1a

Après six jours de récolte, combien d'arachides le petit écureuil avait-il ramassées?

Réponse : _____

Expliquez votre réponse :

48 Cette feuille a été élaborée par Manon Dupelle-Nadeau (École Saint-Joseph de Lancaster), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Question 1b

Après 10 jours de récolte, combien d'arachides le petit écureuil avait-il ramassées?

Réponse : _____

Expliquez votre réponse :

Question 2

Le petit écureuil a maintenant 24 arachides dans ses provisions. À quel nombre de jours sommes-nous?

Expliquez votre réponse en utilisant des arguments convaincants :

Question 3a

En sachant que l'écureuil ne mangeait pas d'arachides de ses provisions, je me demande si un jour dans ses provisions il a pu avoir exactement 27 arachides?

Qu'est-ce que vous en pensez?

Expliquez votre réponse en utilisant des arguments convaincants :

Question 3b

Le défi de l'écureuil

L'écureuil a mis plein de petits papiers pliés dans une boîte. Chaque papier porte un nombre. Il propose aux élèves de l'École Saint-Joseph le jeu suivant :

Les yeux fermés, un élève tire de la boîte un papier plié. Ce nombre représente le nombre de jours que l'écureuil a passé à faire ses provisions depuis qu'il s'est installé dans l'arbre.

L'élève gagne le jeu s'il peut dire le nombre d'arachides qu'il y avait dans ses provisions le jour indiqué sur le petit papier.

Expliquez clairement à l'élève la démarche qu'il doit suivre pour gagner le jeu.

Quand l'écureuil a rencontré Tito!

Un matin que notre écureuil était parti ramasser ses deux arachides, il a rencontré un autre écureuil, appelé Tito.

Ils se sont mis à parler, et Tito a dit :

« Moi aussi je suis allé m'installer dans un arbre, où j'ai trouvé un certain nombre d'arachides. »

Notre écureuil voulait savoir s'il en avait trouvé beaucoup. Pour lui donner un indice, Tito lui a dit :

« Après trois jours de récolte, mes provisions étaient de 17 arachides! »

Question 4

Peux-tu indiquer le nombre d'arachides qu'il y avait dans l'arbre de Tito avant qu'il commence à en chercher d'autres?

Tu dois savoir que, lui aussi, a ramassé deux arachides par jour sans jamais en manger.

Réponse : _____

Expliquez votre réponse en utilisant des arguments convaincants :

Annexe 3

Une leçon pour le cycle moyen

Une activité sur les fractions

Numération et sens du nombre

5e année

Durée

Deux périodes de 45 à 60 minutes chacune.

Description

Cette activité a été élaborée pour permettre aux élèves d'améliorer la compétence Communication à l'aide du dialogue et de l'examen critique des arguments mathématiques des autres élèves. Sur le plan conceptuel, l'activité vise à intégrer, à l'aide de matériel concret, l'idée de fractions équivalentes.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Domaine

Numération et sens du nombre

Attente

Démontrer une compréhension du concept de fractions équivalentes.

Contenu d'apprentissage

Repérer des fractions équivalentes et démontrer l'équivalence à l'aide de matériel concret ou semi-concret et de symboles.

Notes de planification

Pour l'amorce

On utilisera ici les Pattern Blocks®. S'assurer d'avoir les formes géométriques suivantes : 1 hexagone, 6 triangles équilatéraux, 3 losanges, 2 trapèzes.

Pour l'activité

Préparer des boîtes à œufs pour représenter les fractions $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ (voir la figure 2 au chapitre 6).

Chaque groupe aura un entier (un contenant d'une douzaine d'œufs; deux formes de $\frac{1}{2}$; trois formes de $\frac{1}{3}$; quatre formes de $\frac{1}{4}$; six formes de $\frac{1}{6}$ et douze formes de $\frac{1}{12}$).

Acquis préalables

On suppose que les élèves ont acquis les notions élémentaires de fraction qui ont été étudiées lors des années précédentes, soit un demi, un tiers, un quart, un cinquième, etc.

On suppose également que les élèves connaissent les polygones élémentaires (triangle, trapèze, losange, hexagone, etc.).

Déroulement de l'activité

Étape 1 (Amorce)

L'enseignante ou l'enseignant pose à toute la classe la question suivante :

« Pendant la longue fin de semaine du mois de mai, Alain, Serge et Kyle ont dû aider leurs parents à préparer le jardin. Les jardins des trois familles sont identiques : ils ont une forme d'hexagone et ont les mêmes dimensions. Les enfants arrivent à l'école le mardi suivant. Ils discutent ensemble du travail qu'ils ont fait dans le jardin. Alain dit qu'il a travaillé $\frac{1}{3}$ du jardin. Kyle dit qu'il a travaillé $\frac{2}{6}$ du jardin. Serge dit qu'il a travaillé $\frac{1}{2}$ du jardin.

Est-ce que la fraction du jardin travaillée par Kyle est plus grande que celle d'Alain?

Est-ce que la fraction du jardin travaillée par Kyle est plus grande que celle de Serge?

L'enseignante ou l'enseignant invite un élève à utiliser le rétroprojecteur et à y placer les formes géométriques pour représenter les fractions de la terre travaillée par Serge, Alain et Kyle.

Lorsque l'élève et la classe se rendent compte que les fractions de Kyle et d'Alain représentent la même surface du terrain hexagonal, l'enseignante ou l'enseignant insère la notion de fraction équivalente : *« On appelle ces deux fractions des fractions équivalentes parce qu'elles représentent la même surface, la même portion du jardin. »*

L'enseignante ou l'enseignant poursuit son questionnement :

Est-ce que les fractions du jardin travaillées par Serge et Alain sont des fractions équivalentes? Un élève est invité à utiliser le rétroprojecteur et à y placer les polygones correspondants.

Étape 2 (Travail en petits groupes)

L'enseignante ou l'enseignant regroupe les élèves en équipes de deux ou trois et leur remet des boîtes à œufs représentant les fractions $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ainsi que l'entier.

L'enseignante ou l'enseignant remet également aux élèves trois problèmes pour qu'ils vérifient si les fractions sont équivalentes ou non (voir la feuille de route 1 ci-dessous, après les descriptions des étapes). Les élèves devront également faire un dessin qui donnera des arguments clairs et convaincants pour étayer leur raisonnement.

À la suite des trois problèmes, sur la même feuille de route, les élèves sont invités à inventer et à résoudre un problème du même genre.

Il faut s'assurer que les élèves comprennent que chaque groupe va échanger avec un autre groupe les solutions proposées aux trois problèmes donnés. Il faut aussi qu'ils comprennent qu'il y aura un échange et une évaluation des problèmes inventés avec un autre groupe pour qu'ils s'efforcent de bien rédiger leur propre problème et la solution.

Étape 3 (Discussion critique des arguments mathématiques avec un autre groupe)

L'enseignante ou l'enseignant demande que l'on échange entre groupes la feuille de résolution des problèmes 1 à 3 (p. ex., le groupe 1 échange sa feuille avec le groupe 2; le groupe 3 échange sa feuille avec le groupe 4). La tâche consiste à demander aux élèves d'étudier les *arguments mathématiques* de l'autre groupe, puis de les comparer avec les leurs. Sur la feuille de route 2 (voir ci-dessous), les élèves doivent expliquer les différences et rédiger, s'il y a lieu, un nouveau texte comportant des arguments plus clairs et convaincants.

Étape 4 (À faire pendant la deuxième période)

En poursuivant l'activité de la veille, les groupes se rencontrent face à face et commentent les arguments des autres. À tour de rôle, ils doivent expliquer, de façon respectueuse, ce qu'ils considèrent comme étant les points forts et les points faibles des arguments mathématiques des autres. Ils peuvent, s'il y a lieu, rédiger un texte conjoint expliquant la solution aux problèmes donnés et fournissant de meilleurs arguments mathématiques que dans le texte original (la feuille de route 3, ci-dessous, est destinée à cet effet).

Par la suite, l'enseignante ou l'enseignant choisit un membre de chaque équipe combinée (p. ex., un élève du groupe 1 + 2) pour raconter à la classe la façon dont l'échange s'est déroulé et expliquer, s'il y a lieu, les changements dans les arguments présentés et les raisons de ces changements.

Étape 5

Les groupes reviennent à leurs pupitres. Ils échangent à propos des problèmes inventés à la fin de l'étape 2.

Chaque groupe doit étudier l'énoncé du problème et la résolution proposée par l'autre groupe (p. ex., le groupe 1 étudie le problème inventé par le groupe 2 et vice versa). Ils doivent évaluer la clarté du problème rédigé par l'autre groupe et la solution proposée en utilisant la grille donnée ci-dessous (feuille de route 4).

Si le temps le permet, l'enseignante ou l'enseignant conduit une discussion générale.

Étape 6

Objectivation : retour sur l'activité afin de définir collectivement les notions de fractions équivalentes.

Feuille de route 1[49]
(5e année)

Noms des membres du groupe : _____

_____

_____

Instructions

En travaillant en petit groupe, on vous demande de discuter et de résoudre les problèmes ci-dessous. Vous pouvez résoudre ces problèmes à l'aide des boîtes à œufs représentant les fractions $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ainsi que l'entier.

Problème 1

Le dimanche de la fête des Mères, Isabelle et Danielle ont préparé des crêpes aux bananes pour leur maman et les autres membres de leur famille. Le samedi d'avant, chacune d'elles a acheté un gros sac de farine. Pour faire ses crêpes, Isabelle a utilisé $\frac{4}{12}$ de son sac de farine et Danielle a utilisé $\frac{1}{3}$ de son sac de farine. En sachant que les sacs de farine étaient d'égale quantité, est-ce que les fractions de farine utilisées par Danielle et Isabelle sont équivalentes?

[49] Cette feuille a été élaborée par Yves Rainville (École Saint-Joseph, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Réponse

Expliquez votre raisonnement en utilisant des arguments convaincants et en faisant des dessins, au besoin.

Problème 2

Vincent et Jeannick gagnent chacun une grosse tablette de chocolat. Le jour même, Vincent décide de manger $\frac{2}{6}$ de sa tablette et met le reste de côté pour le partager avec ses amis. Jeannick, elle, décide de manger $\frac{8}{24}$ de sa tablette et partagera, elle aussi, le reste avec ses amis. Sachant que les tablettes de chocolat étaient d'égale grosseur, lequel des deux aura le plus de chocolat à partager avec ses amis?

Réponse

Expliquez votre raisonnement en utilisant la terminologie mathématique appropriée et des arguments convaincants, et en faisant des dessins, au besoin.

Problème 3

La mère de Mélissa et de Jean prépare un gros gâteau au chocolat. Pour souper, Mélissa mange $\frac{1}{12}$ du gâteau et son frère Jean en mange $\frac{1}{6}$. Après le repas, leur amie Hélène leur rend visite. La mère de Mélissa dit à Hélène : « Est-ce que tu veux avoir un morceau du gâteau au chocolat? » Elle lui donne $\frac{1}{4}$ du gâteau au chocolat. Voyant cela, Mélissa chuchote à Jean : «Vois-tu? Elle a eu plus de gâteau que nous deux ensemble! » Est-ce que Mélissa a raison?

Réponse

Expliquez votre raisonnement en utilisant des arguments convaincants et en faisant des dessins, au besoin.

Inventez un problème!

À votre tour

En groupe, inventez un problème sur des fractions équivalentes et expliquez comment le résoudre.

(Rappelez-vous que, par la suite, un autre groupe vérifiera si votre problème est énoncé clairement et si votre explication repose sur des arguments convaincants et justes.)

Énoncé du problème

Expliquez la façon de résoudre le problème :

Feuille de route 2[50]
Discussion critique des arguments mathématiques présentés par un autre groupe

Noms des élèves de votre groupe : _____

_____

_____

Instructions

Votre groupe doit maintenant comparer les arguments mathématiques utilisés par un autre groupe pour expliquer comment résoudre les problèmes 1, 2 et 3.

Échangez votre feuille avec un autre groupe choisi par l'enseignant.

N. B. Vous ne pouvez pas écrire sur la feuille de ce groupe!

Problème 1

1. Lisez les arguments qu'ils ont donnés pour expliquer la solution au problème 1.
2. Est-ce que leur argumentation est plus solide que celle que vous avez proposée?

[50] Cette feuille a été élaborée par Yves Rainville (École Saint-Joseph, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Pourquoi?

_____

_____

_____

Voulez-vous modifier les arguments que vous avez fournis initialement?

Si oui, écrivez ici les arguments que vous proposez maintenant.

_____

_____

_____

Problème 2

1. Lisez les arguments que les élèves de l'autre groupe ont donnés pour expliquer la solution au problème 2.
2. Est-ce que leur argumentation est plus solide que celle que vous avez proposée?

   Pourquoi?

   _____

   _____

   _____

Voulez-vous modifier les arguments que vous avez fournis initialement?

Si oui, écrivez ici les arguments que vous proposez maintenant.

_____

_____

_____

Problème 3

1. Lisez les arguments qu'ils ont donnés pour expliquer la solution au problème 3.
2. Est-ce que leur argumentation est plus solide que celle que vous avez proposée?

   Pourquoi?

   _____

   _____

   _____

   Voulez-vous modifier les arguments que vous avez fournis initialement?

   Si oui, écrivez ci-dessous les arguments que vous proposez maintenant.

   _____

   _____

   _____

Feuille de route 3[51]
Nouvelle explication mathématique de la façon de résoudre les problèmes

Noms des élèves des deux groupes : _____

_____

_____

Vous rencontrerez maintenant l'autre groupe. À tour de rôle et de façon respectueuse, vous allez expliquer ce qui vous semble être les points forts et les points faibles de son argumentation mathématique.

S'il le faut, à la suite de cette discussion, vous pouvez rédiger un nouveau texte **conjoint** qui comporte de meilleurs arguments mathématiques. Un seul texte pour les deux groupes est suffisant.

Nouvelle explication mathématique de la façon de résoudre les problèmes.

Problème 1

_____

_____

_____

[51] Cette feuille a été élaborée par Yves Rainville (École Saint-Joseph, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Problème 2

Problème 3

Feuille de route 4[52]
(5e année)

Noms des élèves qui évaluent : _____

_____

_____

Noms des élèves évalués : _____

_____

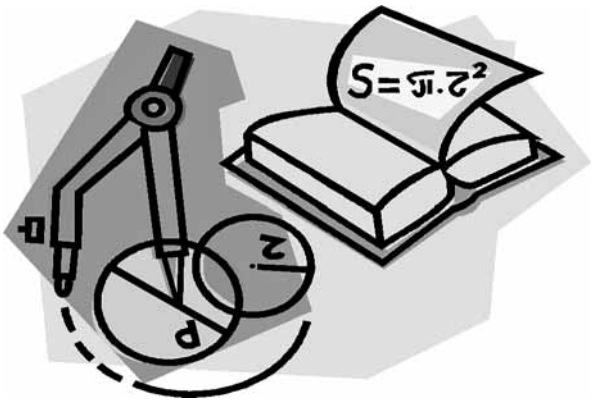
Compétence : Communication	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Dans l'énoncé et la solution du problème sur les fractions équivalentes, les élèves : – utilisent, avec clarté et exactitude, la terminologie et les symboles mathématiques; – présentent des arguments clairs et logiques.	Les élèves – utilisent, avec **peu** de clarté et d'exactitude, la terminologie et les symboles mathématiques; – présentent des arguments **peu** clairs et logiques.	Les élèves – utilisent, avec **une certaine** clarté et exactitude, la terminologie et les symboles mathématiques; – présentent des arguments **relativement** clairs et logiques.	Les élèves – utilisent, avec clarté et exactitude, la terminologie et les symboles mathématiques; – présentent des arguments clairs et logiques.	Les élèves – utilisent, avec **beaucoup** de clarté et d'exactitude, la terminologie et les symboles mathématiques; – présentent des arguments **très** clairs et logiques.
Niveau accordé	**Commentaires (forces, faiblesses, suggestions aux membres de l'autre groupe pour améliorer la manière de poser des problèmes) :**			

52 Cette feuille a été élaborée par Yves Rainville (École Saint-Joseph, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

ANNEXE 4

UNE LEÇON POUR LE CYCLE INTERMÉDIAIRE

Du raisonnement et des limites de la perception



Géométrie et sens de l'espace

7e ou 8e année

Durée

Deux périodes de 60 minutes chacune.

Description

Le but de cette activité est d'amener les élèves à construire la médiatrice d'un segment à l'aide d'une règle et d'un compas. On commence par une activité où des cerceaux servent de matériel de manipulation pour dessiner un quadrilatère. Une exploration des propriétés géométriques du quadrilatère sert d'introduction à l'élaboration d'un texte qui décrit les étapes de construction d'une médiatrice à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée. L'activité se fait en petits groupes de trois élèves. Les petits groupes échangent leur texte. À la fin, les groupes se réunissent pour discuter des points forts et des points faibles des textes proposés.

Note : Cette leçon peut se faire en 7e ou en 8e année. En 7e année, certains résultats généraux qui seront vus en 8e année doivent être considérés comme vrais; les élèves peuvent les vérifier expérimentalement. C'est le cas du théorème qui affirme que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et du théorème qui caractérise deux droites parallèles relativement à une égalité d'angles formés par une sécante et les droites en question.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Année d'études

7e année

Domaine

Géométrie et sens de l'espace

Attente

Utiliser différents instruments pour effectuer des constructions géométriques.

Contenu d'apprentissage

Identifier et construire des droites parallèles, des médianes, des médiatrices et des bissectrices à l'aide de divers instruments et techniques (p. ex., Mira, compas, pliage).

Année d'études

8e année

Domaine

Géométrie et sens de l'espace

Attente

Appliquer les propriétés des angles liés aux triangles et aux droites parallèles coupées par une sécante.

Contenus d'apprentissage

Développer les propriétés d'angles formés par deux droites parallèles et une sécante, la propriété de la somme des angles dans un triangle et celle de l'angle extérieur d'un triangle, et les utiliser pour déterminer les mesures manquantes d'angles dans diverses figures.

Notes de planification

– Préparer le matériel nécessaire pour l'activité : des cerceaux, des mètres non gradués ou des tiges de bois, du ruban gommé, des rouleaux de corde ou de fil, des ciseaux, des cartons carrés d'environ 75 cm de côté et des stylos-feutres.

– Préparer les feuilles de route nécessaires à la tâche (des exemples de feuilles de route se trouvent ci-dessous).

– Préparer un cerceau (qui sera appelé « cerceau modèle ») dont le centre est désigné à l'aide de fils visibles attachés au cerceau avec du ruban gommé. Ce cerceau sera placé devant la classe, comme exemple pour l'activité que les élèves feront en petits groupes.

Acquis préalables

– L'élève connaît la terminologie de la géométrie telle que : segment de droite, angle aigu, angle obtus, angle droit, bissectrice, médiatrice, congruence.

– L'élève connaît les résultats suivants :
  - la somme des angles supplémentaires est égale à 180°;
  - les angles de la base d'un triangle isocèle sont égaux;
  - la somme des angles d'un triangle est égale à 180°;
  - si les côtés d'un triangle sont égaux à ceux d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux (ou congruents);
  - deux droites sont parallèles si les angles alternes-internes formés par une sécante sont égaux (ce résultat est parfois appelé « théorème Z »).

– L'élève doit être capable de trouver le centre de masse d'un objet (c'est cette marche à suivre qui permettra à l'élève de trouver le centre d'un cerceau).

Déroulement de l'activité

Partie 1 (jour 1)

1. L'enseignante ou l'enseignant sépare les élèves en groupes de trois ou quatre élèves.
2. Chaque groupe s'installe à une station de travail où il y a un rouleau de corde, un rouleau de ruban gommé, une paire de ciseaux, un stylo-feutre, un mètre non gradué et un carton.
3. L'enseignante ou l'enseignant distribue la feuille de route : « Des arcs, des cercles et des cerceaux » (voir la feuille de route 1) et lit le premier paragraphe (but de l'activité) avec les élèves. Pendant cette partie, les élèves utilisent une approche empruntée à la science, à savoir trouver le centre de masse du cercle en suspendant un poids verticalement à partir de deux points distincts du cercle. Le point où les deux ficelles se rencontrent représente le centre du cerceau (la méthode est expliquée au site suivant : http://wow.osu.edu/NTB/centerofmass.htm). L'enseignante ou l'enseignant place le cerceau dont le centre est déjà désigné (« cerceau modèle ») de façon que chaque groupe le voit. En utilisant les cerceaux et en suivant les directives de la feuille de route, les élèves construisent un quadrilatère (il s'agit en fait d'un parallélogramme équilatéral ou losange); voir Figure 1, où le quadrilatère est indiqué en pointillé. (On trouvera ci-dessous quelques notes concernant la feuille de route 2.)

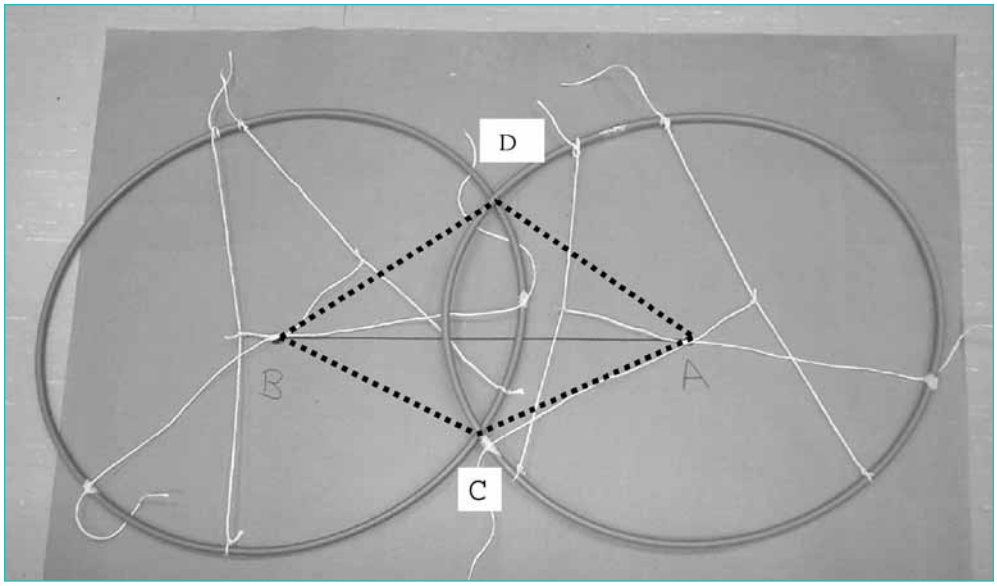


Figure 1. Le centre du cerceau de droite est placé sur le point A; celui de gauche est placé sur B. La construction aboutit au quadrilatère indiqué en pointillé.

4. Si cinq minutes se sont écoulées et si les élèves n'ont pas encore trouvé le centre des cerceaux, il est important que l'enseignante ou l'enseignant rappelle aux élèves la marche à suivre.
5. Lorsque les élèves ont rempli la feuille de route 1, ils doivent recevoir la confirmation de l'enseignante ou de l'enseignant avant de recevoir la feuille de route 2 : « Les propriétés d'un quadrilatère » (voir ci-après).

6. Quand la feuille de route 2 est terminée, chaque groupe rencontre un autre groupe désigné par l'enseignante ou l'enseignant. Pendant la rencontre en petits groupes, les élèves échangent leurs réponses et justifient leurs arguments. L'enseignante ou l'enseignant circule parmi les groupes et s'assure que les groupes ne se limitent pas à un échange de réponses, mais qu'ils discutent de façon critique des arguments des autres.

Notes sur la feuille de route 2 « Les propriétés d'un quadrilatère »

Le contenu de géométrie de 7e année inclut quelques déductions sur des angles supplémentaires et quelques propriétés sur les réflexions et les translations. Ce n'est qu'en 8e année que les élèves étudieront en détail la propriété d'angles formés par deux droites parallèles.

La feuille de route 2 propose une séquence de questions où les élèves sont amenés à constater que, d'après la construction suivie, les segments AC, AD, BC et BD sont des rayons de cercles égaux et sont donc des segments congrus entre eux (voir Figure 2 ci-dessous; voir aussi la question 4 de la feuille de route).

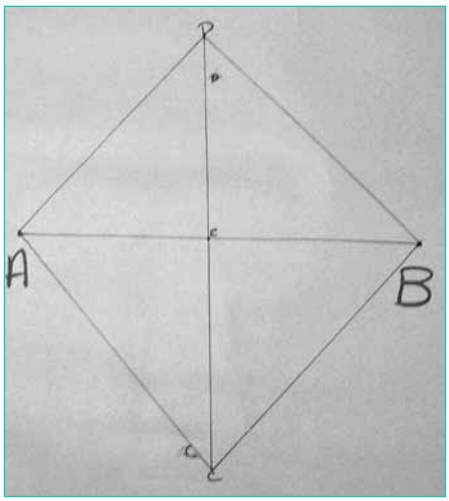


Figure 2. Quadrilatère construit à l'aide des cerceaux.

Réponses aux questions 5 et 6 de la feuille de route :

En partant du résultat central précédent, les élèves, aidés au besoin par l'enseignante ou l'enseignant, peuvent déduire les deux résultats suivants :

– Les triangles ACB et ADB sont isocèles (voir Figure 3).

– Les triangles CAD et CBD sont isocèles (voir Figure 4).

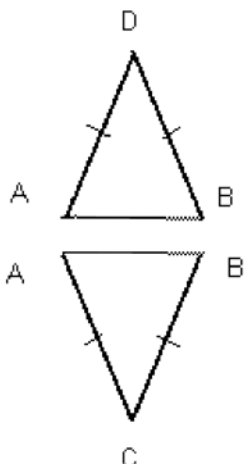


Figure 3 : Les triangles ACB et ADB sont isocèles.

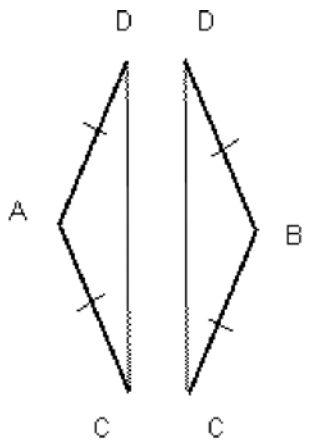


Figure 4 : Les triangles CAD et CBD sont isocèles.

Puisque, d'après (1), le triangle ACB est isocèle, les angles de la base sont égaux (contenu d'apprentissage de la 6e année). On en déduit le résultat suivant :

– Les angles CAB et CBA sont égaux (voir Figure 5).

Du fait que ADB est un triangle isocèle, on en déduit que :

– Les angles DAB et DBA sont égaux (voir Figure 5).

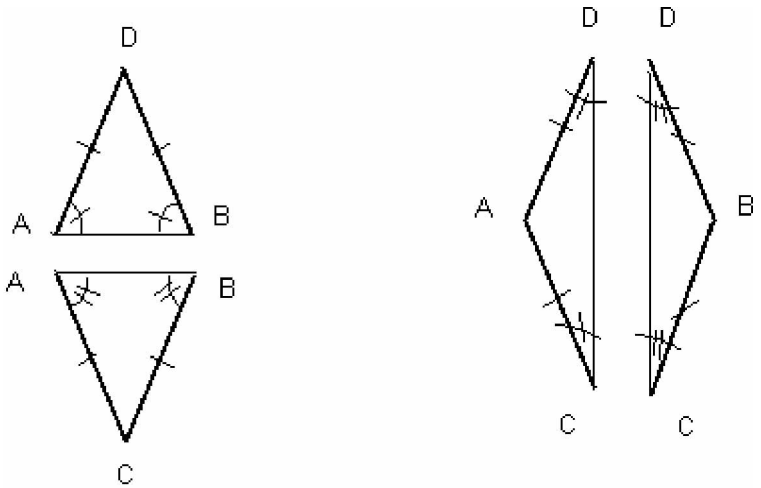


Figure 5 : Dans un triangle isocèle, les angles de la base sont égaux.

Pour pouvoir affirmer que les angles DBA et CBA sont égaux, on peut faire intervenir le critère d'égalité de triangles, mentionné dans les acquis préalables : si les côtés d'un triangle sont égaux à ceux d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux (ou congruents).

Ce critère nous permet d'affirmer que les triangles ADB et ACB sont égaux (question 7 de la feuille de route). Et de cela, nous déduisons que :

– les angles DBA et CBA sont égaux;

– les angles DAB et CAB sont égaux.

Par conséquent :

– les quatre angles DAB, CAB, DBA et CBA sont égaux entre eux (question 9 de la feuille de route).

Un même raisonnement montre que :

– les quatre angles BDC, ADC, BCD et ACD sont égaux entre eux (questions 8 et 10 de la feuille de route).

En partant de ces renseignements, retournons au quadrilatère initial pour répondre à la question 11 de la feuille de route. Sur la figure 6, on voit que les droites AD et BC sont coupées par la sécante CD. Comme les angles alternes-internes (indiqués par « e » sur le dessin) sont égaux, les segments AD et CB sont parallèles.

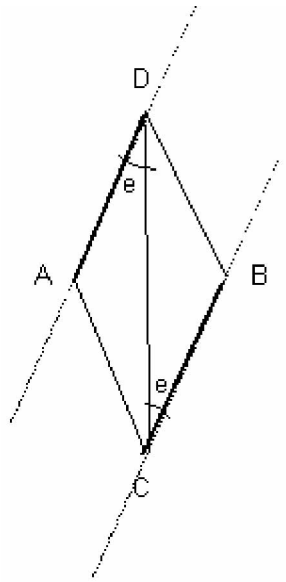


Figure 6 : Les segments AD et CB sont parallèles.

Le même raisonnement, mais en utilisant AB comme sécante des segments AC et DB, prouve que AC et DB sont parallèles.

La figure ABCD est donc un parallélogramme équilatéral ou losange (question 12 de la feuille de route).

Pour répondre aux questions 13 et 14, portons notre attention sur les triangles ADE et BDE (voir Figure 7). Que pouvons-nous dire des angles x et y? Étant donné que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° (voir acquis préalables), nous pouvons dire que x et y sont égaux.

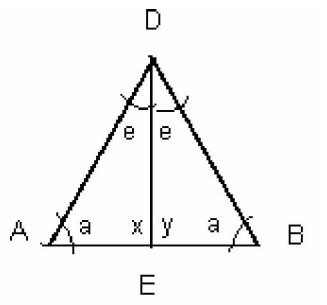


Figure 7 : Dans le triangle à gauche, x + a + e = 180.
Dans le triangle à droite, y + a + e = 180.

De plus, les angles x et y sont supplémentaires. Donc x + y = 180°. On en déduit que x = 90° et y = 90°.

Les angles droits sont donc les quatre angles autour du point E (réponse à la question 14). Le triangle BED est bien la réflexion du triangle AED par rapport à la droite DE. Par conséquent, le segment AE est égal au segment BE, ce qui prouve que DE est la médiatrice de AB (réponse à la question 16).

Comme l'analyse de la leçon l'a montré, les élèves ont tendance à utiliser des arguments plutôt empiriques. Un des buts de la leçon est de les amener à prendre conscience que les résultats précédents s'obtiennent en partant de raisonnements mathématiques déductifs.

Partie 2 (jour 2)

1. Discussion de groupe : L'enseignante ou l'enseignant demande à un groupe d'expliquer ou de faire un retour sur l'activité de la leçon précédente. L'enseignante ou l'enseignant doit amener les élèves à prendre conscience qu'ils ont réussi à construire une médiatrice sans l'usage d'une règle graduée et que les segments de droites AC, AD, BC et BD sont tous congrus, car ce sont des rayons de deux cerceaux égaux.
2. L'enseignante ou l'enseignant revoit la définition du mot *compas* avec ses élèves comme étant un outil utilisé en géométrie pour construire des arcs et des cercles.
3. L'enseignante ou l'enseignant distribue la feuille de route 3 et demande aux élèves de construire la médiatrice d'un segment AB à l'aide de leur compas et d'un abaisse-langue (qui joue le rôle de règle non graduée). Ces élèves doivent faire un retour sur le travail de la journée précédente pour accomplir la tâche.
4. L'enseignante ou l'enseignant explique aux élèves que chaque groupe doit écrire un texte qui décrit les étapes à suivre pour construire la médiatrice d'un segment de droite à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.
5 L'enseignante ou l'enseignant coordonne un échange de textes entre les groupes. Les élèves doivent évaluer de façon critique le texte d'un autre groupe. Pour cela, chaque groupe suit les instructions du texte de l'autre groupe et vérifie son exactitude; chaque groupe doit également indiquer si les explications sont claires et suffisantes.
6. Par la suite, les élèves se réunissent, font un échange de leur texte, puis reprennent leur feuille sur laquelle ils apportent les changements nécessaires.

Feuille de route 1[53]
Des arcs, des cercles et des cerceaux

But

Le but général de cette activité est de construire une figure géométrique à l'aide de matériel concret et de discuter des propriétés géométriques de la figure construite. Tout le long de l'activité, vous devez discuter avec les membres de votre équipe. Vous serez amenés à comparer vos résultats avec ceux d'un autre groupe pour voir si votre groupe et l'autre groupe ont utilisé de bons arguments mathématiques.

Directives

1. Sur votre carton, tracez un segment de droite AB.
2. À l'aide de ruban gommé, désignez un des cerceaux comme étant le cerceau « 1 » et l'autre comme étant le cerceau « 2 ».
3. À l'aide du matériel qui est à votre disposition, trouvez le centre de chacun des cerceaux. (Vous pouvez faire référence au cerceau donné en exemple, c'est-à-dire au « cerceau modèle ».)
4. Placez le centre du cerceau « 1 » sur le point « A ».
5. Placez le centre du cerceau « 2 » sur le point « B ».

53 Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

6. À l'aide du stylo-feutre, désignez les points d'intersection des cerceaux sur le carton par les lettres « C » et « D ».

7. Enlevez les cerceaux et mettez-les à côté.

8. Tracez le segment de droite CD.

9. Tracez les segments de droite AC, AD, BC et BD.

10. Désignez le point d'intersection de AB et de CD à l'aide de la lettre E.

11. Quel type de forme géométrique est ACBD? Expliquez votre réponse.

    _____

    _____

12. Demandez à votre enseignante ou enseignant de vérifier si vous avez bien réalisé la première partie de l'activité. Si oui, votre groupe recevra la feuille de route 2.

Feuille de route 2[54]
Les propriétés d'un quadrilatère

Assurez-vous d'utiliser tous les symboles et la terminologie appropriés en géométrie lorsque vous répondez aux questions.

1. Identifiez toutes les figures formées.

2. Identifiez tous les angles aigus. Justifiez votre réponse.

3. Identifiez tous les angles obtus. Justifiez votre réponse.

54 Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

4. Identifiez tous les segments congrus. Justifiez votre réponse.

5. Marianne affirme que le triangle ABC est isocèle; Pierre dit que Marianne se trompe, qu'il s'agit d'un triangle équilatéral; José dit que ce n'est ni isocèle, ni équilatéral. Qui a raison? Expliquez en détail votre réponse.

6. Est-ce que les triangles CAD et CBD sont isocèles?

7. Est-ce que les triangles ABC et ABD sont congruents? Justifiez votre réponse.

8. Est-ce que les triangles CAD et CBD sont congruents?

9. Identifiez tous les angles égaux à l'angle ABD.

10. Identifiez tous les angles égaux à l'angle CDB.

11. Identifiez tous les segments de droites parallèles. Justifiez votre réponse.

12. Quel type de figure géométrique est le quadrilatère ABCD? Justifiez votre réponse.

13. Justin dit : « Les angles AED et BED sont égaux. Cela résulte du fait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° ». Justin a raison, mais son argument n'est pas complet. En vous basant sur les triangles AED et BED, élaborez un argument complet.

14. Identifiez tous les angles droits.

15. Simone dit que le triangle BED est la réflexion du triangle AED par rapport à la droite DE. A-t-elle raison? Expliquez!

16. Quelle est la médiatrice de AB? Justifiez votre réponse.

Feuille de route 3[55]

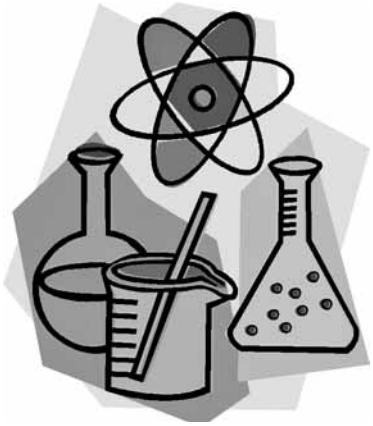
Écrivez ci-dessous un texte décrivant les étapes à suivre pour construire, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, la médiatrice d'un segment de droite AB.

55 Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Annexe 5

Une leçon pour le cycle supérieur

Une activité sur la mathématisation du réel



Taux de variation

12e année

Durée

240 minutes

Description

Le but de cette activité est d'amener les élèves à explorer les relations entre plusieurs variables dans un contexte expérimental mettant l'accent sur l'argumentation, la communication et l'utilisation de la technologie. L'activité se déroule en trois parties. Dans la première partie, en travaillant en petits groupes, les élèves font, en petits groupes, une analyse qualitative de l'eau s'écoulant d'un récipient en forme de cône (entonnoir). Chaque petit groupe génère des hypothèses et des arguments quant à la relation graphique entre certaines variables. Dans la deuxième partie, les élèves comparent leurs hypothèses et leurs arguments à ceux formulés par un autre groupe. Cette comparaison leur permet de raffiner leurs hypothèses, au besoin. Dans la troisième partie, les élèves font une expérience et, à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, procèdent à une mathématisation de l'écoulement de l'eau afin de confirmer ou d'infirmer leurs hypothèses. L'activité se termine par une discussion conjointe des hypothèses formulées et de la signification de la mathématisation effectuée.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Domaine

Taux de variation et caractéristiques de courbes

Attente

Déterminer et interpréter les taux de variation de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

Contenus d'apprentissage

Taux de variation

– Poser des problèmes et formuler des hypothèses portant sur des taux de variation dans le domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

– Calculer et interpréter des taux moyens de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.

– Estimer et interpréter des taux instantanés de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.

– Expliquer, en situation et en général, la différence entre des taux moyens de variation et des taux instantanés de variation.

– Tirer des conclusions à partir de différentes représentations d'une situation pour les taux de variation et les comparer aux hypothèses initiales.

Usage du calcul différentiel

– Déterminer, à l'aide des techniques du calcul différentiel, les caractéristiques d'un modèle pour des situations tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

– Comparer les caractéristiques d'un modèle mathématique aux caractéristiques des données qu'il représente.

– Rédiger une question reliée à une situation et y répondre en ayant recours à des modèles mathématiques, à l'aide des techniques du calcul différentiel.

– Communiquer ses résultats de façon claire et précise en intégrant efficacement texte et représentations mathématiques.

Notes de planification

– Préparer le laboratoire pour l'expérience (du papier quadrillé, une règle, une soupape/bouchon, un entonnoir, un chronomètre et une calculatrice à affichage graphique pour chaque groupe de trois élèves; l'entonnoir doit être assez transparent et se vider en une vingtaine de secondes).

– Reproduire les feuilles de route 1, 2, 3 et 4 (voir ci-dessous) que les élèves utiliseront pendant l'étude des taux de variation et de l'élaboration de la mathématisation du phénomène en question.

– S'assurer qu'on dispose du matériel suivant (pour chaque groupe de trois ou quatre élèves) :

- un grand entonnoir;
- une règle;
- un cylindre gradué;
- de l'eau;
- un chronomètre;
- une calculatrice TI-83 Plus;
- une soupape/bouchon (pour arrêter l'eau à 2, 4, 6, 8).

Déroulement de l'activité

Amorce ou mise en situation (en salle de classe)

Démonstration par l'enseignant

Dans cette partie, l'enseignant fait une démonstration devant toute la classe de l'eau s'écoulant dans un cône. Pour attirer l'attention des élèves sur les variables qu'on retiendra par la suite, alors que le cône se vide, il souligne le fait que la hauteur de la surface de l'eau qui reste dans le cône change au fur et à mesure que le temps passe. Il souligne également le fait que le volume et le rayon du cercle formé par la surface de l'eau changent aussi en fonction du temps.

Partie 1 (en salle de classe) : l'étude qualitative du phénomène

En groupes de trois, à l'aide de la feuille de route 1 (une feuille par élève; la feuille se trouve ci-après), les élèves discutent et font une analyse qualitative de certaines variables étudiées. Sur la feuille de route, ils doivent esquisser plusieurs graphiques exprimant la relation entre les variables. L'enseignant circule, écoute et anime la discussion des élèves, s'il y a lieu.

Partie 2 (en salle de classe) : comparaison et analyse des résultats d'un autre groupe

Après avoir rempli la feuille de route, chaque groupe d'élèves échange la feuille de route avec un autre groupe désigné par l'enseignant. Puisqu'il y a trois feuilles de route par groupe et qu'une feuille seulement est envoyée à l'autre groupe, les élèves pourront comparer leurs résultats à ceux de l'autre groupe. À l'aide de la feuille de route 2 (voir ci-après), les élèves procèdent à une étude et à une évaluation des graphiques et des explications fournies par l'autre groupe.

Quand les élèves ont terminé l'évaluation, les groupes qui ont échangé la feuille de route 1 se réunissent et discutent de leur évaluation, et ce, dans le respect des autres et de façon objective.

Partie 3 : expérimentation, exploration et mathématisation

Au laboratoire

À cette étape, les élèves reviennent à la structure initiale de petits groupes de trois élèves. On demande aux élèves de tracer un schéma du cône afin de mathématiser le phénomène de l'écoulement de l'eau dans un cylindre. On leur demande de mesurer la hauteur et le diamètre de l'entonnoir. On leur demande également de désigner, sur le schéma ainsi construit, les variables suivantes : surface de l'eau qui reste dans l'entonnoir, rayon de la surface de l'eau, hauteur de l'eau, volume de l'eau.

Ils commencent en cherchant une expression algébrique se rapportant à certaines des variables de base qui seront nécessaires à la mathématisation du phénomène (voir la feuille de route 3). Quand les élèves ont fini, l'enseignant demande à l'un d'eux de venir présenter les résultats de son groupe au tableau. Les autres élèves ont l'occasion de faire valoir leur accord ou leur désaccord. L'élève au tableau et son groupe peuvent contre-argumenter, etc.

Quand tous les groupes se sont mis d'accord sur les expressions ou formules algébriques qui conviennent le mieux à la relation entre certaines variables de base, on passe à la phase expérimentale.

À cette étape, les élèves, toujours en groupes de trois, utilisent la feuille de route 4 afin de faire l'expérience.

– Présenter aux élèves le problème suivant :

  Un réservoir en forme de cône repose sur sa pointe. De l'eau s'écoule de sa pointe dans un cylindre gradué. Des mesures de l'eau qui s'écoule sont prises toutes les deux secondes.

– Demander aux groupes de suivre la démarche à l'aide de la feuille de route 4.

– Quand les élèves ont terminé, l'enseignant demande à un représentant de chaque équipe de passer au tableau afin de présenter une partie du travail. Par exemple, le représentant du groupe 1 peut expliquer comment son groupe a trouvé les graphiques b) et d) à la question 1; la représentante du groupe 2 peut expliquer la marche à suivre que ses membres ont suivie pour trouver les graphiques f) et g) à la question 2.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est d'animer une séance d'évaluation des arguments présentés par les différents groupes et d'intervenir, au besoin, pour s'assurer que les résultats sont cohérents par rapport aux exigences de la pratique scientifique et mathématique.

Activités complémentaires/Réinvestissement

– Demander à l'élève d'étudier qualitativement des problèmes d'écoulement d'eau en utilisant des cônes obliques et d'autres récipients similaires (p. ex., une sphère).

Note : Dans la partie expérimentale, pour mesurer la hauteur de l'eau dans le cône, on peut utiliser un CBR (Calculator-Based Ranger).

Feuille de route 1[56]

Groupe numéro : _____

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

_____

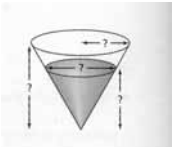
Partie 1 : étude qualitative du phénomène

Un cône contient de l'eau. Il se vide à un débit constant.

Question 1

Sans faire de calculs, aux questions a), b), c) et d), on te demande :

a) de discuter avec les autres membres de ton équipe de l'allure du graphique de la relation entre les variables indiquées (voir la première ligne de chaque rectangle à gauche),



b) de faire une esquisse du graphique et

c) d'expliquer ton raisonnement à l'aide d'arguments convaincants.

56 Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Variables : le rayon (r) de la surface de l'eau dans le cône et la hauteur (h) de l'eau 	Explique ton raisonnement :
Variables : la hauteur et le rayon 	Explique ton raisonnement :
Variables : le rayon et le temps 	Explique ton raisonnement :
Variables : le rayon et le temps 	Explique ton raisonnement :

Question 2

Sans faire de calculs, aux questions e), f) et g), on te demande :

a) de discuter avec les autres membres de ton équipe de l'allure du graphique de la relation entre les variables indiquées (voir la première ligne de chaque rectangle à gauche),

b) de faire une esquisse du graphique et

c) d'expliquer ton raisonnement à l'aide d'arguments convaincants.

Variables : le volume (V) de l'eau qui reste dans le cône et la hauteur (h) de l'eau qui reste dans le cône 	Explique ton raisonnement :
Variables : le volume de l'eau qui reste dans le cône et le rayon de la surface de l'eau dans le cône 	Explique ton raisonnement :

Variables : le volume (V) de l'eau qui reste dans le cône et le temps 	Explique ton raisonnement :

Feuille de route 2[57]

Groupe numéro : _____

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

_____

Partie 2 : comparaison et analyse des résultats d'un autre groupe

Question 3.1

Dans cette partie, on te demande d'analyser les résultats d'un autre groupe et de les comparer à ceux que ton groupe a obtenus.

Pour chaque question de a) à g) de la feuille de route 1, tu dois te prononcer sur les points suivants :

1. Est-ce que l'allure de la relation est correcte?
2. Est-ce que les arguments sont convaincants?

[57] Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Question 3.2

Dans cette partie, les groupes qui ont échangé leur feuille se réunissent et commentent, de façon respectueuse et en toute objectivité, les arguments des autres. Chaque groupe a ainsi l'occasion de défendre ses arguments.

Après l'échange, les groupes reviennent à leur place.

À la suite de l'analyse des réponses fournies par l'autre groupe et de la discussion que vous avez eue, y a-t-il des réponses que vous avez données pour lesquelles vous êtes en mesure maintenant d'améliorer vos arguments? Si oui, indiquez ces questions, changez vos réponses au besoin et rédigez de nouveaux raisonnements, basés sur de meilleurs arguments.

Feuille de route 3[58]

Groupe numéro : _____

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

_____

Partie 3 : expérimentation, exploration et mathématisation

Question 4

Mesure la hauteur et le diamètre de l'entonnoir.

Réponses : _____

Trace ci-dessous un schéma du cône afin de mathématiser le phénomène de l'écoulement de l'eau dans un cylindre.

[58] Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Identifie, sur le schéma construit, les variables suivantes : rayon de la surface de l'eau qui reste dans l'entonnoir, hauteur de l'eau, volume de l'eau.

Trouve une formule mathématique qui relie le rayon à la hauteur de l'eau dans l'entonnoir.

Question 5

Sachant que la formule du volume d'un cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, trouve une formule reliant la hauteur d'eau qui reste dans le cône au volume d'eau qui reste dans le cône.

Feuille de route 4[59]

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

_____

Objectif

Dans cette expérience, en continuant à travailler en groupes de trois, vous étudierez les relations entre plusieurs des variables qui interviennent lorsque l'eau s'écoule d'un entonnoir dans un cylindre gradué.

Matériel

– un grand entonnoir

– une règle

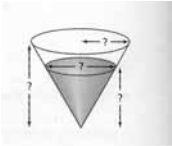
– un cylindre gradué

– de l'eau

– un chronomètre

– une calculatrice TI-83 Plus®

– une soupape/bouchon (pour arrêter l'eau à 2, 4, 6, 8) ou votre pouce!



59 Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Démarche

1. Obstruez l'ouverture du bas et remplissez entièrement l'entonnoir d'eau.

2. Mesurez la hauteur de l'eau dans le cône et notez-la. Mesurez également le rayon de la surface d'eau au haut de l'entonnoir. Ces valeurs correspondent à t = 0. Inscrivez les autres valeurs dans le tableau ci-dessous.

3. Afin d'étudier la relation entre le temps et les autres variables (rayon, hauteur, volume) du cylindre, laissez l'eau s'écouler de l'entonnoir dans le cylindre gradué et prenez les mesures correspondant aux variables lorsque le temps d'écoulement est égal à 2 secondes, à 4 secondes, à 6 secondes, etc. jusqu'à ce que l'entonnoir soit complètement vide, en ayant soin de reboucher rapidement l'ouverture après chaque arrêt avec son doigt ou la soupape.

4. Remplissez le tableau ci-dessous.

Temps en secondes (t)	**Rayon en cm (r)**	**Hauteur en cm (h)**	**Volume-sorti (Vs)**	**Volume dans le cône (Vc)**
0				
2				
4				
6				
8				
10				

Question 6

En partant des données du tableau de valeurs, utilisez la calculatrice à affichage graphique pour tracer le graphique de la relation entre les variables indiquées ci-dessous :

Le volume dans le cône (Vc) et le temps (t). 	Est-ce que votre résultat reflète ce que vous aviez prédit à la question 2? Expliquez les différences, s'il y a lieu.

Question 7

1. Trouvez une formule mathématique qui donne Vc en fonction de t.

2. Expliquez chaque terme de votre formule.

3. En utilisant le résultat de la question 5, déduisez une formule mathématique de la hauteur, h, en fonction du temps, t.

4. Tracez le graphique de cette équation à l'aide de la calculatrice à affichage graphique. Reproduisez le graphique ci-dessous.

5. À partir du tableau d'observation que vous avez obtenu en faisant l'expérience, tracez, à l'aide de la calculatrice, le graphique de Vc en fonction de t. Reproduisez le graphique ci-dessous et comparez-le au graphique obtenu en 7.4. Discutez des différences.

6. Est-ce que ces graphiques ressemblent à celui que vous avez esquissé à la question 1? Expliquez!

Question 8

En utilisant la formule de h(t) obtenue à la question 7.3, trouvez la valeur de $\frac{dh}{dt}$ au point t = 1 s et au point t = 2 s. Expliquez le sens de ces valeurs (Pourquoi sont-elles différentes ou égales? Que signifie leur signe?).